۱ گزینه ۴

مساحت مثلث را از دو طریق به دست می‌آوریم:

$$S=\frac{(a^۲-۱)(a+۱)^۲}{۲}\ ,\ S=\frac{x\times\sqrt{۱۰}(a+۱)}{۲}$$

حال این دو مقدار را باهم برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{(a^۲-۱)(a+۱)^۲}{۲}=\frac{x\times\sqrt{۱۰}(a+۱)}{۲}\Rightarrow(a^۲-۱)(a+۱)^۲=x\times\sqrt{۱۰}(a+۱)$$

$$\Rightarrow\frac{(a^۲-۱)(a+۱)^۲}{\sqrt{۱۰}(a+۱)}=x\Rightarrow x=\frac{(a^۲-۱)(a+۱)}{\sqrt{۱۰}}$$

۲ گزینه ۱

نکته:

$$\sqrt{x^۲}=|x|$$

می‌دانیم حجم یک هرم با مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h، برابر است با $\frac{۱}{۳}Sh$، بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}(x^۳+x^۲-۵x+۳)\Rightarrow S\times(x+۳)=x^۳+x^۲-۵x+۳$$

پس می‌توان مساحت مربع را با تقسیم چندجمله‌ای $x^۳+x^۲-۵x+۳$ بر $x+۳$ به دست آورد. داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x^۲-۵x+۳ & x+۳ \\ \underline{\pm x^۳\pm ۳x^۲} & \overline{x^۲-۲x+۱} \\ -۲x^۲-۵x+۳ & \\ \underline{\mp ۲x^۲\mp ۶x} & \\ x+۳ & \\ \underline{\pm x\pm ۳} & \\ ۰ & \end{array}$$

بنابراین مساحت مربع برابر $x^۲-۲x+۱=(x-۱)^۲$ است، پس طول ضلع مربع مطابق نکته برابر $\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$ می‌باشد.

۳ گزینه ۱

توجه: برای به دست آوردن مقادیری که به ازای آن کسر تعریف نشده است، نباید کسر را ساده کنیم.

نکته: یک کسر به ازای مقادیری که مخرج آن را صفر می‌کند، تعریف نشده است.

پس فقط کافی است مخرج آن را صـفر قرار دهیم، یعنی $(۳x-۱)(x^۲-x-۲)=۰$. می‌دانیم ضرب دو عبارت زمانی صفر است که یکی از آن‌ها یا هر دو صفر باشند. از طرفی باید پرانتز دوم را تجزیه کنیم، داریم:

$$(۳x-۱)(x^۲-x-۲)=(۳x-۱)(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}۳x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\\ \text{یا}\\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ \text{یا}\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

پس به ازای ۳ مقدار کسر داده‌شده، تعریف نشده است.

۴ **گزینه ۳**

نکته: در تقسیم دو چندجمله‌ای بر یکدیگر تقسیم زمانی قابل انجام است که درجهٔ مقسوم بزرگ‌تر یا مساوی درجهٔ مقسوم‌علیه باشد.

نکته: اگر درجهٔ مقسوم‌علیه برابر با n باشد، درجهٔ باقی‌مانده می‌تواند $۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱$ باشد،

پس حداکثر درجهٔ باقی‌مانده یک واحد کمتر از درجهٔ مقسوم‌علیه است.

باتوجه‌به نکات بالا درجهٔ مقسوم‌علیه ۳ است پس درجهٔ باقی‌مانده برحسب x می‌تواند صفر، ۱ یا ۲ باشد؛ بنابراین گزینهٔ ۳ نادرست است.

۵ **گزینه ۳**

نکته: اگر a، b و c اعداد صحیح و غیرصفر باشند، داریم:

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

ابتدا با کمک نکته، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم، داریم:

$$\frac{۵y^{۲}+۱۸}{y} = \frac{۵y^{۲}}{y} + \frac{۱۸}{y} = ۵y + \frac{۱۸}{y}$$

حاصل این عبارت زمانی یک عدد صحیح می‌شود که $\frac{۱۸}{y}$ مقداری صحیح شود (دقت کنید که چون $y \in N$ است، پس $۵y$ همواره صحیح است). عبارت $\frac{۱۸}{y}$ به ازای تمام مقادیری که y مقسوم‌علیه ۱۸ باشد صحیح می‌شود؛ بنابراین:

$$y = ۱ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱} = ۱۸$$
$$y = ۲ \Rightarrow \frac{۱۸}{۲} = ۹$$
$$y = ۳ \Rightarrow \frac{۱۸}{۳} = ۶$$
$$y = ۶ \Rightarrow \frac{۱۸}{۶} = ۳$$
$$y = ۹ \Rightarrow \frac{۱۸}{۹} = ۲$$
$$y = ۱۸ \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۸} = ۱$$

بنابراین ۶ مقدار صحیح برای y وجود دارد.

۶ **گزینه ۴**

نکته (رابطهٔ تقسیم):

$$\begin{array}{l|l} C & \underline{B} \\ & Q \\ \hline R & \end{array} \quad \Rightarrow C = B \times Q + R$$

اگر مطابق نکته عبارت داده‌شده را به‌صورت زیر در نظر بگیریم، داریم:

$$3x^3 + x^2 - x + 1 = \underbrace{(x-2)}_{B} \times \underbrace{A}_{Q} + \underbrace{b}_{R}$$

بنابراین:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + x^2 - x + 1 & \underline{\quad x - 2 \quad} \\ \underline{-3x^3 \mp 6x^2} & 3x^2 + 7x + 13 \\ \quad 7x^2 - x + 1 & \\ \underline{\quad -7x^2 \mp 14x} & \\ \qquad 13x + 1 & \\ \underline{\qquad -13x \mp 26} & \\ \qquad\qquad 27 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x^3 + x^2 - x + 1 = (x-2)(3x^2 + 7x + 13) + 27$$

پس مقدار $b = 27$ است.

۷ **گزینه ۲**

ابتدا تقسیم را انجام داده و باقی‌مانده را برابر با صفر در نظر می‌گیریم:

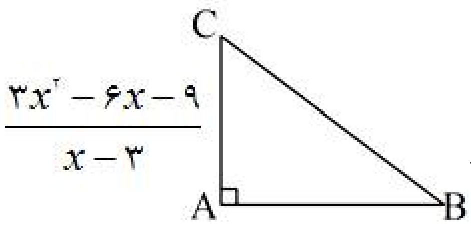
$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - ax - b & \underline{\quad x + 2 \quad} \\ \underline{-x^3 \pm 2x^2} & x^2 - 3x + (-a + 6) \\ -3x^2 - ax - b & \\ \underline{\mp 3x^2 \mp 6x} & \end{array}$$

$$-ax + 6x - b \overset{(*)}{=\!=} \begin{array}{l} (-a+6)x - b \\ \underline{-(-a+6)x \pm 2(-a+6)} \\ \quad -b + 2a - 12 \end{array}$$

ابتدا دقت کنید که در مرحلهٔ (*) چون دو عبارت برحسب x داشتیم، از یک x فاکتور گرفته تا ضریب آن مشخص شود. حال می‌دانیم باقی‌مانده صفر است؛ بنابراین:

$$-b + 2a - 12 = 0 \Rightarrow 2a - b = 12 \xrightarrow{\times 2} 4a - 2b = 24$$

۸ گزینه ۱



ابتدا AC را ساده کرده و سپس به کمک مساحت و طول ضلع قائمهٔ داده‌شده، طول ضلع قائمهٔ دیگر را به دست می‌آوریم، سپس به کمک رابطهٔ فیثاغورس طول وتر را به دست می‌آوریم. داریم:

$$AC = \frac{۳x^۲-۶x-۹}{x-۳} = \frac{۳(x-۳)(x+۱)}{x-۳} = ۳(x+۱)$$

$$S = \frac{AC \times AB}{۲} \Rightarrow \frac{۳(x+۱)\times AB}{۲} = ۶x^۲ + ۱۲x + ۶$$

$$\Rightarrow \frac{۳(x+۱)\times AB}{۲} = ۶(x+۱)^۲ \Rightarrow ۳(x+۱)\times AB = ۱۲(x+۱)^۲$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۱۲(x+۱)^۲}{۳(x+۱)} = ۴(x+۱)$$

حال به کمک اضلاع قائمهٔ طول وتر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AC = ۳(x+۱) \\ AB = ۴(x+۱) \end{cases} \Rightarrow AC^۲ + AB^۲ = BC^۲ \Rightarrow (۳(x+۱))^۲$$

$$+ (۴(x+۱))^۲ = BC^۲$$

$$\Rightarrow ۹(x+۱)^۲ + ۱۶(x+۱)^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۲۵(x+۱)^۲ = BC^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{۲۵(x+۱)^۲} = ۵\,|x+۱|$$

چون طول اضلاع باید مثبت باشند، پس:

$$AB > ۰ \Rightarrow ۴(x+۱) > ۰ \Rightarrow x+۱ > ۰$$

بنابراین:

$$BC = ۵\overbrace{|x+۱|}^{\text{مثبت}} = ۵(x+۱) = ۵x+۵$$

۹ گزینه ۲

چون عددهای ۳− و ۴− عبارت را تعریف‌نشده می‌کنند، پس به ازای آن‌ها مخرج صفر می‌شود.

$$x^۲ + mx + n$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -۳ \Rightarrow ۹ - ۳m + n = ۰ \\ x = -۴ \Rightarrow ۱۶ - ۴m + n = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow m = ۷ , n = ۱۲$$

$$\Rightarrow ۳m - n = ۳ \times ۷ - ۱۲ = ۹$$

۱۰ گزینه ۲

چون $x + y + z = ۱۵$ پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = ۱۵ - z \\ x + z = ۱۵ - y \\ y + z = ۱۵ - x \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{۱۵-z-z}{z} + \frac{۱۵-x-x}{x} + \frac{۱۵-y-y}{y}$$

$$\Rightarrow A = \frac{۱۵}{z} - ۲ + \frac{۱۵}{x} - ۲ + \frac{۱۵}{y} - ۲$$

$$\Rightarrow A = ۱۵(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z}) - ۶ \Rightarrow A = ۱۵ \times \frac{۱}{۳} - ۶ = ۵ - ۶ = -۱$$

۱۱ گزینه ۳

ابتدا عرض از مبدأ خط $۲y = ۳x - ۶$ را به دست می‌آوریم:

$$x = ۰ \Rightarrow ۲y = -۶ \Rightarrow y = -۳$$

حال عرض از مبدأ باید در خط $ay + bx + c = ۰$ صدق کند؛ بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix} \Rightarrow a(-۳) + b(۰) + c = ۰ \Rightarrow -۳a + c = ۰ \Rightarrow -۳a = -c \Rightarrow ۳a = c$$

حال کسر داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{c(z^۲-۳z-۱۰)}{a(z-۵)(z+۲)} = \frac{c\,\cancel{(z+۲)}\,\cancel{(z-۵)}}{a\,\cancel{(z-۵)}\,\cancel{(z+۲)}} = \frac{c}{a} \xrightarrow{۳a=c} \frac{۳a}{a} = ۳$$

۱۲ گزینه ۴

$$\frac{۱+x}{۱-x} + \frac{۱-x}{۱+x} + ۲ = \frac{(۱+x)^۲+(۱-x)^۲+۲(۱-x^۲)}{(۱-x)(۱+x)} = \frac{۲x^۲+۲+۲-۲x^۲}{۱-x^۲} = \frac{۴}{۱-x^۲}$$

۱۳ گزینه ۴

$$\frac{x^{۱۰}-b^{۱۰}}{b^{۱۰}-x^{۱۰}} \times \frac{x^۲-۲x+۱}{۲x-x^۲-۱} = \frac{-(b^{۱۰}-x^{۱۰})}{b^{۱۰}-x^{۱۰}} \times \frac{(x-۱)^۲}{-(x-۱)^۲} = (-۱)\times(-۱) = ۱$$

۱۴ گزینه ۴

چون همواره $(۲x-۱)^۲ \geq ۰$ بنابراین $((۲x-۱)^۲)^۳ + ۴ > ۰$، پس مخرج کسر هیچ‌گاه برابر با صفر نمی‌شود.

۱۵ گزینه ۲

$$\frac{۲}{۵}(x+۳) - \frac{x}{۲} \leq ۳x + ۷$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰} ۴x + ۱۲ - ۵x \leq ۳۰x + ۷۰$$

$$\Rightarrow -x - ۳۰x \leq ۷۰ - ۱۲ \Rightarrow -۳۱x \leq ۵۸ \Rightarrow x \geq -\frac{۵۸}{۳۱}$$

۱۶ گزینه ۱

$$\frac{a^۲b^۲-۱}{a^۲b^۲-۲ab+۱} \times \frac{a^۳b^۲-a^۲b}{۲a^۳b} = \frac{(ab-۱)(ab+۱)}{(ab-۱)^۲} \times \frac{a^۲b(ab-۱)}{۲a^۳b}$$

$$= \frac{(ab-۱)^۲(ab+۱)\times a^۲b}{(ab-۱)^۲\times ۲a^۳b} = \frac{ab+۱}{۲a}$$

۱۷ گزینه ۳

عبارت $A(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است، پس:

$$A = 5x^4 - ax^3 + bx^2 + a + b = (x^2-1) \times (\text{عبارتی برحسب } x)$$

حال اگر $x^2 = 1$ باشد، طرف راست عبارت برابر صفر است، پس طرف چپ نیز به ازای $x^2 = 1$ همواره صفر است؛ یعنی:

$$5 \times 1 - a \times x \times 1 + b \times 1 + a + b = 0 \Rightarrow 5 - ax + 2b + a = 0$$

پس ضریب x باید صفر باشد:

$$a = 0 \Rightarrow 5 + 2b = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

پس:

$$b^2 - ab = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

۱۸ گزینه ۳

$$M = \frac{1}{(a+b)^2} \times \left[\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right) \div \left(\frac{b-a}{ab}\right)\right] = \frac{1}{(a+b)^2} \times \left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^2} \times \frac{ab}{b-a}\right]$$
$$= \frac{1}{(a+b)^2} \times \frac{(b-a)(b+a)}{ab(b-a)} = \frac{1}{(a+b)ab}$$

۱۹ گزینه ۲

$$\frac{x^4z^8+x^2z^4y^4+y^8}{x^2z^4+y^4-xz^2y^2} = \frac{(x^2z^4)^2+(y^4)^2+2x^2z^4y^4-x^2z^4y^4}{x^2z^4+y^4-xz^2y^2}$$
$$= \frac{(x^2z^4+y^4)^2-(xy^2z^2)^2}{x^2z^4+y^4-xz^2y^2} = \frac{(x^2z^4+y^4+xy^2z^2)(x^2z^4+y^4-xy^2z^2)}{x^2z^4+y^4-xz^2y^2}$$
$$= x^2z^4 + y^4 + xy^2z^2$$

۲۰ گزینه ۴

$$\frac{x}{x^2-16} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x^2-16} \Rightarrow \frac{x}{x^2-16} = \frac{A(x-4)}{x^2-16} + \frac{B}{x^2-16}$$
$$\Rightarrow x = Ax - 4A + B \Rightarrow \begin{cases} Ax = x \Rightarrow A = 1 \\ -4A + B = 0 \Rightarrow -4 + B = 0 \Rightarrow B = 4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow B^A = 4^1 = 4$$

۲۱ گزینه ۴

$$A = \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{t^4(t+1)+2t^2(t+1)+(t+1)} = \frac{(1-t)(1+t)(1+t^2)}{(t^4+2t^2+1)(t+1)}$$
$$= \frac{(1-t)(1+t^2)}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t}{t^2+1}$$

۲۲ گزینه ۱

در هر عمل تقسیم، مقسوم برابر با حاصل‌ضرب مقسوم‌علیه در خارج‌قسمت به‌علاوهٔ باقی‌مانده است؛ بنابراین داریم:

$$x^۲ - ۷x + b = (x + a)(x - ۲) + ۵ \Rightarrow x^۲ - ۷x + b = x^۲ + (a - ۲)x - ۲a + ۵$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a - ۲ = -۷ \Rightarrow a = -۵ \\ -۲a + ۵ = b \xrightarrow{a=-۵} -۲(-۵) + ۵ = b \Rightarrow b = ۱۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow a + b = -۵ + ۱۵ = ۱۰$$

۲۳ گزینه ۳

$$\frac{(۲x^۲-۱)(x^۲+x+۱)+۲x^۳-x}{۲x^۲-۱} = \frac{(۲x^۲-۱)(x^۲+x+۱)+x(۲x^۲-۱)}{۲x^۲-۱}$$
$$= \frac{(۲x^۲-۱)(x^۲+x+۱+x)}{۲x^۲-۱} = x^۲ + ۲x + ۱ = (x + ۱)^۲$$

۲۴ گزینه ۴

(نصف ارتفاع × مجموع دو قاعده) = مساحت ذوزنقه

$$= \left(\frac{m - ۲۰}{m + ۱} + \frac{m^۲ - m - ۲۹}{m + ۱}\right) \times \frac{m^۲ - ۱}{۷ - m} \times \frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{m^۲-۴۹}{m+۱} \times \frac{m^۲-۱}{۷-m} \times \frac{۱}{۲} = \frac{(m-۷)(m+۷)}{m+۱} \times \frac{(m-۱)(m+۱)}{۷-m} \times \frac{۱}{۲}$$
$$= \frac{(m+۷)\times(۱-m)}{۲}$$

۲۵ گزینه ۱

$$\frac{۱}{(x-۱)(۲x+۱)} = \frac{۲x+۱+M(۳x-۳)}{۳(x-۱)(۲x+۱)}$$
$$\Rightarrow ۲x + ۱ + M(۳x - ۳) = ۳ \Rightarrow M = \frac{-۲x+۲}{۳x-۳} \Rightarrow M = \frac{-۲(x-۱)}{۳(x-۱)} \Rightarrow M = -\frac{۲}{۳}$$

۲۶ گزینه ۳

محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $= ۳ \times (۴x - ۲) = ۱۲x - ۶$

محیط مربع $= ۴ \times (۲x + ۲) = ۸x + ۸$

$$\Rightarrow ۱۲x - ۶ - (۸x + ۸) = ۱۲x - ۶ - ۸x - ۸ = ۴x - ۱۴$$

۲۷ گزینه ۴

$$M = (x^{۲} - ۱)\left(\frac{(۱+x)^{۲}+(۱-x)^{۲}}{(۱-x)(۱+x)}\right) + ۲x^{۲} + ۳x$$
$$= (x-۱)(x+۱)\left[\frac{۱+x^{۲}+۲x+۱-۲x+x^{۲}}{(۱-x)(۱+x)}\right] + ۲x^{۲} + ۳x$$
$$= -\left[۲ + ۲x^{۲}\right] + ۲x^{۲} + ۳x = -۲ - ۲x^{۲} + ۲x^{۲} + ۳x = ۳x - ۲, x = \frac{a}{۳}$$
$$\Rightarrow M = ۳ \times \frac{a}{۳} - ۲ = a - ۲$$

۲۸ گزینه ۴

$$\frac{ab\left(\frac{۱}{a^{۲}}+\frac{۱}{b^{۲}}+\frac{۲}{ab}\right)}{a+b} = \frac{ab\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)^{۲}}{a+b} = \frac{ab\left(\frac{a+b}{ab}\right)^{۲}}{a+b}$$
$$= \frac{\frac{(a+b)^{۲}}{ab}}{a+b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{۱}{b} + \frac{۱}{a}$$

۲۹ گزینه ۲

اعداد a، b و c اعدادی صحیح هستند. اگر $a = -\frac{۱}{c}$ باشد، برای a و c دو حالت داریم که یکی "۱" و دیگری "-۱" است. با این حساب $a + c = ۰$ خواهد بود:

$$M = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{b}{-b} = -۱$$

باقی اطلاعات مسئله اضافی است.

۳۰ گزینه ۱

اتحاد مجموع دوجمله‌ای:

$$\frac{x^{۲} - ۲xy + y^{۲} - x + y}{x^{۲} - xy - x} = \frac{(x-y)^{۲} - (x-y)}{x(x-y-۱)} = \frac{(x-y)\overset{۱}{\cancel{(x-y-۱)}}}{\underset{۱}{x\cancel{(x-y-۱)}}} = \frac{x-y}{x}$$

۳۱ گزینه ۴

حاصل صورت برابر است با:

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(\underbrace{1-\frac{1}{x-1}}_{\frac{x-1-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}}) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times\dots\times \frac{\cancel{x-2}}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

حاصل مخرج برابر است با:

$$(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\dots(\underbrace{1+\frac{1}{x-1}}_{\frac{x-1+1}{x-1}=\frac{x}{x-1}}) = \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times\dots\times \frac{x}{\cancel{x-1}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{2}{x(x-1)} = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow 30 = x(x-1) = 6\times 5 \Rightarrow x = 6$$

۳۲ گزینه ۲

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{-\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}}$$

برای گویا کردن صورت کافی است که صورت در $\sqrt{y}$ و برای گویا کردن مخرج، مخرج در $x-\sqrt{xy}$ ضرب شود، درنتیجه در کل باید در $\frac{\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}}$ ضرب شود.

۳۳ گزینه ۱

به ازای ریشه‌های مخرج کسر نامعین است، پس باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}(4x-x^2)\underbrace{(x^2+1)}_{>0} = 0 \Rightarrow x(2-x)(2+x) = 0 \Rightarrow x = 0, 2, -2 \\ x^2+3x+2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -1, -2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x = \{-2, -1, 0, 2\}$$

۳۴ گزینه ۳

$$C = (2xy+3y^2)^{-2} \div \frac{4x^2y-12xy^2+9y^3}{4x^2-9y^2} = \frac{1}{(2xy+3y^2)^2} \times \frac{4x^2-9y^2}{4x^2y-12xy^2+9y^3}$$

$$= \frac{1}{(y(2x+3y))^2} \times \frac{(2x-3y)(2x+3y)}{y(4x^2-12xy+9y^2)}$$

$$= \frac{1}{y^2(2x+3y)^2} \times \frac{(2x-3y)(2x+3y)}{y(2x-3y)^2} = \frac{1}{y^3(2x+3y)(2x-3y)} = \frac{1}{y^3(4x^2-9y^2)}$$

۳۵ گزینه ۱

$$\frac{(a-۱)\cancel{(a-۲)}}{\cancel{(a+۲)}}\times\frac{۳\cancel{a}}{\cancel{(a-۲)}}\times\frac{۲\cancel{(a+۲)}}{\cancel{a}(a-۵)}=\frac{۶a-y}{a-۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۶(a-۱)}{a-۵}=\frac{۶a-y}{a-۵}\Rightarrow ۶a-۶=۶a-y\Rightarrow \underline{y=۶}$$

۳۶ گزینه ۳

$$\left(\frac{xy+۱}{xy-۱}-\frac{xy-۱}{xy+۱}\right)\div\left(\frac{xy+۱}{xy-۱}+\frac{xy-۱}{xy+۱}-۲\right)$$

$$=\left(\frac{(xy+۱)^{۲}-(xy-۱)^{۲}}{(xy-۱)(xy+۱)}\right)\div\left(\frac{(xy+۱)^{۲}+(xy-۱)^{۲}-۲(xy-۱)(xy+۱)}{(xy-۱)(xy+۱)}\right)$$

$$=\frac{\cancel{x^۲y^۲}+۲xy\cancel{+۱}-\cancel{x^۲y^۲}+۲xy\cancel{-۱}}{(xy-۱)(xy+۱)}\times\frac{(xy-۱)(xy+۱)}{\cancel{x^۲y^۲}+\cancel{۲xy}+۱+\cancel{x^۲y^۲}-\cancel{۲xy}+۱-\cancel{۲x^۲y^۲}+۲}$$

$$=\frac{\overset{۱}{\cancel{۴}}xy}{\underset{۱}{\cancel{(xy-۱)}}\underset{۱}{\cancel{(xy+۱)}}}\times\frac{\overset{۱}{\cancel{(xy-۱)}}\overset{۱}{\cancel{(xy+۱)}}}{\underset{۱}{\cancel{۴}}}=xy$$

۳۷ گزینه ۲

$$\frac{A^{۲}-B^{۲}}{C^{۲}}=\frac{(A-B)(A+B)}{C^{۲}}$$

$$=\frac{\left[(a^{۲}-b^{۲})-(a^{۲}+b^{۲})\right]\left[(a^{۲}-b^{۲})+(a^{۲}+b^{۲})\right]}{(۲ab)^{۲}}=\frac{(\cancel{a^{۲}}-b^{۲}\cancel{-a^{۲}}-b^{۲})(a^{۲}\cancel{-b^{۲}}+a^{۲}\cancel{+b^{۲}})}{۴a^{۲}b^{۲}}$$

$$=\frac{(-۲b^{۲})(۲a^{۲})}{۴a^{۲}b^{۲}}=\frac{-۴a^{۲}b^{۲}}{۴a^{۲}b^{۲}}=-۱$$

۳۸ گزینه ۴

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2ax^2 + bx + 15 & x^2 - 2x + 6 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 + 2x^2 - 6x} & x + 2(1-a) \\
2x^2(1-a) + (b-6)x + 15 & \\
\underline{-2x^2(1-a) + 4x(1-a) - 12(1-a)} & \\
x(b - 6 + 4 - 4a) + 15 - 12 + 12a &
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} 15 - 12 + 12a = 0 \Rightarrow 3 + 12a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \\ b - 6 + 4 - 4a = 0 \xrightarrow{a=-\frac{1}{4}} b - 2 + 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}
$$

$$
a \times b = -\frac{1}{4} \times 1 = -\frac{1}{4}
$$

۳۹ گزینه ۱

اگر $x = 2y$ باشد، داریم:

$$
x^3 - 8y^3 = (2y)^3 - 8y^3 = 8y^3 - 8y^3 = 0
$$

یعنی به ازای $x - 2y = 0$ عبارت $x^3 - 8y^3$ صفر می‌شود، پس عبارت $x^3 - 8y^3$ بر $x - 2y$ بخش‌پذیر است.

۴۰ گزینه ۳

عبارت $2x^4 + 3x^2 - (2a^2 + 1)$ را بر $(x^2 - a)$ تقسیم می‌کنیم:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 + 3x^2 - (2a^2 + 1) & x^2 - a \\ \cline{2-2}
 & 2x^2 + (2a + 3) \\ \cline{1-1}
3a - 1 &
\end{array}
$$

عبارت A بر عبارت B بخش‌پذیر است $\Rightarrow 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow$ خارج‌قسمت $= 2x^2 + \frac{11}{3}$

۴۱ گزینه ۱

ریشه‌های مقسوم‌علیه (عددی که با قرار گرفتن به جای x در مقسوم‌علیه حاصل صفر می‌شود) را به دست می‌آوریم:

$$
x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1
$$

با قرار دادن ریشه‌های مقسوم علیه در مقسوم باقی‌مانده را به دست می‌آوریم، اما باتوجه‌به زوج بودن تمام xها در مقسوم فرقی نمی‌کند ۱ یا ۱- جایگذاری شود، پس عدد ۱ را به جای x در مقسوم جایگذاری می‌کنیم، داریم:

$$
\underbrace{1^{100} - 1^{98} + 1^{96} + \dots + 1^4 - 1^2}_{\text{۵۰ تا}} + 1 = \underbrace{1 - 1 + 1 + \dots + 1 - 1}_{0} + 1 = 0 + 1 = 1
$$

پس باقی‌مانده برابر با ۱ است.

۴۲ **گزینه ۳**

برای به دست آوردن محیط نیاز به طول هر ۳ ضلع داریم؛ بنابراین ابتدا باید طول وتر را به دست آوریم.

اگر طول وتر را c در نظر بگیریم، به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2=c^2 \Rightarrow \frac{4x}{(x+1)^2}+\frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}=c^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}=c^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}=c^2 \Rightarrow c^2=1 \Rightarrow c=\pm 1$$

دقت داریم که چون طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد؛ پس مقدار $c=-1$ قابل‌قبول نیست.

بنابراین محیط این مثلث برابر است با:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}+1=\frac{2\sqrt{x}+x-1+x+1}{x+1}=\frac{2\sqrt{x}+2x}{x+1}$$

۴۳ **گزینه ۲**

راه‌حل اول:

باتوجه‌به صورت و مخرج کسر اول، می‌بینیم که تجزیه کردن آن‌ها به‌سادگی امکان‌پذیر نیست؛ بنابراین از تساوی دو کسر استفاده می‌کنیم.

دقت کنید که صورت کسر اول از درجهٔ ۳ و صورت کسر دوم از درجهٔ ۱ است؛ پس باید صورت کسر اول بر عبارتی تقسیم‌شده باشد تا تبدیل به $x-2$ شود.

برای پیدا کردن این عبارت داریم:

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-3x-14 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm x^3 \mp 2x^2} & x^2+5x+7 \\
\quad 5x^2-3x-14 & \\
\quad \underline{\pm 5x^2 \mp 10x} & \\
\qquad 7x-14 & \\
\qquad \underline{\pm 7x \mp 14} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

باتوجه‌به مساوی بودن دو کسر، اکنون برای یافتن مخرج کسر دوم باید مخرج کسر اول را بر x^2+5x+7 تقسیم کنیم.

$$\square=14+10x+2x^2\div(x^2+5x+7) \Rightarrow \square=\frac{2\,\cancel{(7+5x+x^2)}}{\cancel{x^2+5x+7}}=2$$

راه‌حل دوم:

$$\square=\frac{(x-2)(14+10x+2x^2)}{x^3-3x^2-3x-14}$$

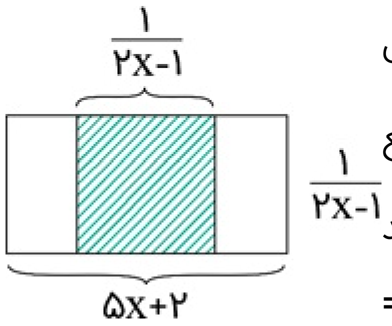
$$\square=\frac{14x+10x^2+2x^3-28-20x-4x^2}{x^3+3x^2-3x-14}=\frac{2x^3+6x^2-6x-28}{x^3+3x^2-3x-14}=\frac{2\,\cancel{(x^3+3x^2-3x-14)}}{\cancel{x^3+3x^2-3x-14}}=2$$

پس گزینهٔ ۲ درست است.

۴۴ **گزینه ۱**

بزرگ‌ترین مربعی که درون یک مستطیل می‌توان کشید، باید اندازهٔ اضلاع آن برابر عرض مستطیل باشد.

راه‌حل اول:



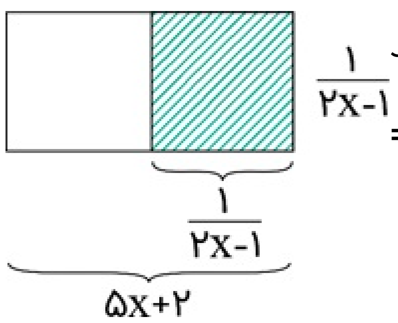
مساحت مستطیل : $(5x+2)\times\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{5x+2}{2x-1}$

مساحت مربع : $\left(\frac{1}{2x-1}\right)^2=\frac{1}{(2x-1)^2}$

مساحت قسمت سفید = مساحت مستطیل − مساحت مربع

$$=\frac{5x+2}{2x-1}-\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{(5x+2)(2x-1)-1}{(2x-1)^2}=\frac{10x^2-5x+4x-2-1}{(2x-1)^2}=\frac{10x^2-x-3}{4x^2-4x+1}$$

راه‌حل دوم:



مساحت قسمت سفید : $\left(5x+2-\frac{1}{2x-1}\right)\left(\frac{1}{2x-1}\right)$

$$=\frac{10x^2-x-3}{4x^2-4x+1}$$