۱ **گزینه ۴**

برای آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید $\Delta = ۰$ باشد. به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$۱)\ \Delta = ۴ - ۱۲ = -۸ \neq ۰$

$۲)\ \Delta = ۱ + ۱۶ = ۱۷ \neq ۰$

$۳)\ \Delta = ۶۴ - ۶۰ = ۴ \neq ۰$

$۴)\ \Delta = ۱۰۰ - ۱۰۰ = ۰$

۲ **گزینه ۱**

برای اینکه معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید $\Delta = ۰$ باشد، بنابراین:

$\Delta = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = ۰$

$\Rightarrow (m+۲)^۲ - ۴(۲m+۱)(۱) = ۰$

$\Rightarrow m^۲ + ۴m + ۴ - ۸m - ۴ = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۴m = ۰$

$\Rightarrow m(m-۴) = ۰ \Rightarrow m = ۰$ یا $m = ۴$

با قرار دادن مقادیر m در معادله، ریشه‌های مضاعف را می‌یابیم:

$m = ۰ : x^۲ + ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$m = ۴ : ۹x^۲ + ۶x + ۱ = ۰ \Rightarrow (۳x+۱)^۲ = ۰$

$\Rightarrow ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$

۳ **گزینه ۲**

نکته: در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ اگر مقدار Δ برابر صفر شود، این معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف است که مقدار آن برابر $-\frac{b}{۲a}$ خواهد بود.

مطابق نکته، چون معادلـهٔ داده‌شـده دارای یک ریشهٔ مضاعف است، پس مقدار ریشهٔ آن برابر $-\frac{b}{۲a} = \frac{-(-۱۲)}{۲\times۹} = \frac{۲}{۳}$ خواهد بود. دقت کنید که نیاز به محاسبهٔ مقدار c نیست.

۴ **گزینه ۲**

برای آنکه معادلهٔ درجه ۲، ریشهٔ حقیقی نداشته باشد باید $\Delta < ۰$ باشد:

$\Delta = ۴k^۲ - ۴(k+۲) < ۰ \Rightarrow k^۲ - k - ۲ < ۰ \Rightarrow (k+۱)(k-۲) < ۰$

k		−۱		۲	
P	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow -۱ < k < ۲$

۵ گزینه ۱

$x=۲$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند پس:

$$(m-۱)۲^۲-۷(۲)+۲m=۰ \Rightarrow (m-۱)۴-۱۴+۲m=۰$$
$$\Rightarrow ۴m-۴-۱۴+۲m=۰ \Rightarrow ۶m=۱۸ \Rightarrow m=۳$$
$$\xrightarrow{m=۳ \text{ را در معادله قرار می‌دهیم}} ۲x^۲-۷x+۶=۰$$

معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=(-۷)^۲-۴(۲)(۶)=۴۹-۴۸=۱$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۷\pm۱}{۴}=\begin{cases} x=۲ \\ x=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۶ گزینه ۴

اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادله باشد، داریم:

$$(m^۲-۲)x^۲+(m+۱)x+۲m-۳=۰$$
$$\xrightarrow{x=-۱}(m^۲-۲)(-۱)^۲+(m+۱)(-۱)+۲m-۳=۰$$
$$\Rightarrow m^۲-۲-m-۱+۲m-۳=۰ \Rightarrow m^۲+m-۶=۰$$
$$\Rightarrow (m+۳)(m-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ m=-۳ \end{cases}$$

m دو حالت دارد، هر دو حالت را بررسی می‌کنیم:

$$\text{حالت اول}: m=۲ \Rightarrow ۲x^۲+۳x+۱=۰$$
$$\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x+۱)(۲x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

در این حالت، ریشهٔ دیگر $x=-\frac{۱}{۲}$ است.

$$\text{حالت دوم}: m=-۳ \Rightarrow ۷x^۲-۲x-۹=۰$$
$$\xrightarrow{\text{تجزیه}}(x+۱)(۷x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=\frac{۹}{۷} \end{cases}$$

در این حالت، ریشهٔ دیگر $x=\frac{۹}{۷}$ است.

پس ریشهٔ دیگر معادله، $x=-\frac{۱}{۲}$ یا $x=\frac{۹}{۷}$ است.

۷ گزینه ۲

$$x_1=-۲\Rightarrow (m-۱)(۴)+۲-m^۲-۱=۰\Rightarrow ۴m-۴+۲-m^۲-۱=۰$$
$$\Rightarrow -m^۲+۴m-۳=۰\Rightarrow (m-۱)(m-۳)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m=۱\\ m=۳\end{cases}$$

چون معادله درجهٔ دوم است، بنابراین $m=۱$ قابل‌قبول نیست زیرا به ازای آن ضریب $x^۲$ برابر با صفر می‌شود، پس:

$$m=۳\Rightarrow ۲x^۲-x-۱۰=۰\Rightarrow \Delta=۱+۸۰=۸۱$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۸۱}}{۴}=\frac{۱\pm۹}{۴}=\begin{cases} x=-۲\\ x=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

۸ گزینه ۲

عبارت درجه دو $y=ax^۲+bx+c$ در صورتی به ازای هر مقدار دلخواه x مثبت است که دو شرط $a>۰$ و $\Delta<۰$ همزمان برقرار باشد.
مجموعه جواب این دو شرط را به دست آورده و بین آن ها اشتراک می گیریم:

$$۱)\ a>۰\Rightarrow m-۱>۰\Rightarrow m>۱\quad (I)$$
$$f(x)=(m-۱)x^۲+۶x+۲m+۱$$

$$۲)\ \Delta<۰\Rightarrow ۶^۲-۴(m-۱)(۲m+۱)<۰\Rightarrow ۳۶-۴(m-۱)(۲m+۱)<۰\ \overset{\div ۴}{\Rightarrow}\ ۹-(m-۱)(۲m+۱)<۰$$
$$\Rightarrow ۹-۲m^۲+m+۱<۰\Rightarrow -۲m^۲+m+۱۰<۰\Rightarrow ۲m^۲-m-۱۰>۰\Rightarrow (۲m-۵)(m+۲)>۰$$
$$\Rightarrow m>\frac{۵}{۲}\ \text{یا}\ m<-۲\quad (II)$$

بین دو مجموعه جواب (I) و (II) اشتراک می گیریم:

$$(I)\bigcap(II): m>\frac{۵}{۲}\Rightarrow m>۲/۵$$

۹ گزینه ۱

برای آنکه عبارت درجه‌دومی همواره مثبت باشد، باید Δ آن منفی و ضریب $x^۲$ مثبت باشد:

$$P=x^۲-۲x+m\Rightarrow \begin{cases} a=۱>۰\\ \Delta=۴-۴m<۰\Rightarrow m>۱\end{cases}$$

۱۰ گزینه ۴

شرط قرارگیری نمودار تابع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ زیر محور xها، $\Delta<۰$ و $a<۰$ می‌باشد، در همین نگاه اول معلوم است که $a=۱>۰$، بنابراین به ازای هیچ مقداری از m، این نمودار زیر محور xها قرار نمی‌گیرد.

۱۱ گزینه ۳

اگر عبارت درجهٔ دوم $p = ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} \Delta = b^۲ - ۴ac < ۰ \\ a > ۰ \end{cases}$$

برای عبارت درجهٔ دوم $p(x) = ۳mx^۲ - ۲x + ۱$ داریم:

$$\Delta < ۰ \Rightarrow (-۲)^۲ - ۴ \times (۳m)(۱) < ۰ \Rightarrow ۴ - ۱۲m < ۰$$

$$\Rightarrow -۱۲m < -۴ \Rightarrow m > \frac{۱}{۳} \quad (۱)$$

$$a > ۰ \Rightarrow ۳m > ۰ \Rightarrow m > ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} m > \frac{۱}{۳}$$

۱۲ گزینه ۲

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac < ۰ \Rightarrow (-۲)^۲ - ۴(m-۳)(۱) < ۰ \Rightarrow m > ۴ \\ a > ۰ \Rightarrow m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > ۳ \end{cases}$$

اشتراک دو بازه: $m > ۴$

۱۳ گزینه ۲

با شرط مثبت بودن $x^۲$ طرفین را در $x^۲$ ضرب می‌کنیم و جهت برنمی‌گردد:

$$\xrightarrow{x \neq ۰} x + ۱ > ۲x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - x - ۱ < ۰ \Rightarrow (x-۱)(۲x+۱) < ۰$$

x		$-\frac{۱}{۲}$		۱	
P	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\frac{۱}{۲}, ۱) - \{۰\}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\frac{۱}{۲}, ۰) \cup (۰, ۱)$$

$$a + b + c + d = -\frac{۱}{۲} + ۰ + ۰ + ۱ = \frac{۱}{۲}$$

۱۴ گزینه ۲

$$\frac{-۲(x^۴-۱)-۱}{۱-x^۲} \geq \frac{(x^۲)(۱-x^۲)-۱}{۱-x^۲} \Rightarrow \frac{-۲(x^۴-۱)}{۱-x^۲} - \frac{۱}{۱-x^۲} \geq \frac{(x^۲)(۱-x^۲)}{۱-x^۲} - \frac{۱}{۱-x^۲}$$

$$\xrightarrow{x \neq \pm ۱} \frac{-۲(x^۴-۱)}{۱-x^۲} \geq x^۲ \Rightarrow \frac{۲(۱-x^۲)(۱+x^۲)}{۱-x^۲} \geq x^۲ \Rightarrow ۲ + ۲x^۲ \geq x^۲$$

$$x^۲ + ۲ \geq ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است}$$

از طرفی $x \neq \pm ۱$ است. پس مجموعهٔ جواب به‌صورت $R - \{\pm ۱\}$ می‌باشد؛ بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله، شامل دو عدد صحیح ۱ و -۱ نیست.

۱۵ **گزینه ۴**

$$-x^2+5x-4=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \;,\; (x+3)^3=0 \Rightarrow x=-3$$

جدول تعیین علامت کسر $P(x)=\dfrac{-x^2+5x-4}{(x-1)^2(x+3)^3}$ به‌صورت زیر است:

x		-3		1		4	
$-x^2+5x-4$	$-$		$-$	۰	$+$	۰	$-$
$(x-1)^2$	$+$		$+$	۰	$+$		$+$
$(x+3)^3$	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$P(x)$	$+$	ت ن	$-$	ت ن	$+$	۰	$-$

جواب نامعادله : $(-\infty,-3)\cup(1,4]$

۱۶ **گزینه ۳**

مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$6x^2-7x-5=(3x-5)(2x+1)$$

$$3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

$$2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

تعیین علامت می‌کنیم:

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$	
$3x-5$	$-$		$-$	۰	$+$
$(3x-5)(2x+1)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
$\dfrac{3x-5}{6x^2-7x-5}$	$-$	ت ن	$+$	ت ن	$+$

مجموعه جواب نامعادله $(-\infty,-\frac{1}{2})$ است.

۱۷ **گزینه ۲**

نکته: اگر معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارای $\Delta < ۰$ باشـد (دارای ریشـهٔ حقیقی نباشد)، آنگاه این عبارت در کل اعداد حقیقی، هم علامت a است. با تعیین ریشه‌های معادله، عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$x^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = -۴ \Rightarrow$ ریشهٔ حقیقی ندارد

$|x| + ۲ = ۰ \Rightarrow |x| = -۲ \Rightarrow$ ریشهٔ حقیقی ندارد

$x^۲ - x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۴ = -۳ < ۰ \Rightarrow$ ریشهٔ حقیقی ندارد

$x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$

x		-۲		۲	
$x^۲+۴$	+		+		+
$\|x\|+۲$	+		+		+
$x^۲-x+۱$	+		+		+
$x^۲-۴$	+	۰	−	۰	+
عبارت	+		−		+
		تعریف نشده		تعریف نشده	

$\Rightarrow$ مجموعه جواب : $(-۲, ۲)$

۱۸ **گزینه ۳**

$$\frac{x^۳ - x^۲}{۳(x^۳ - ۱)} > ۱ \Rightarrow \frac{x^۲(x-۱)}{۳(x-۱)(x^۲+x+۱)} > ۱ \xrightarrow{x \neq ۱}$$

$$\frac{x^۲}{۳(x^۲+x+۱)} > ۱ \xrightarrow[\text{چون } \Delta<۰ \text{ و } a>۰]{x^۲+x+۱>۰}$$

طرفین نامعادله را بدون تغییر جهت نامعادله در عبارت مثبت $۳(x^۲ + x + ۱)$ ضرب می‌کنیم:

$۳x^۲ + ۳x + ۳ < x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x + ۳ < ۰$

چون در عبارت درجه دوم $۲x^۲ + ۳x + ۳$، دلتا منفی و ضریب $x^۲$ مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت است و نامعادله جواب ندارد.

۱۹ گزینه ۲

$$\frac{۱}{x-۲} < \frac{۱}{x-۳} \Rightarrow \frac{۱}{x-۲} - \frac{۱}{x-۳} < ۰$$

$$\Rightarrow \frac{x-۳-x+۲}{(x-۲)(x-۳)} < ۰ \Rightarrow \frac{-۱}{(x-۲)(x-۳)} < ۰$$

$$\xrightarrow{x \neq ۲\,,\,۳} (x-۲)(x-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad , \quad x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

x	$-\infty$	۲		۳	$+\infty$
x−۲	−	۰	+		+
x−۳	−		−	۰	+
(x−۲)(x−۳)	+	ت.ن	−	ت.ن	+

جواب نامعادله $: x < ۲$ یا $x > ۳$

جواب نامعادله $= (-\infty, ۲) \bigcup (۳, +\infty) = R - [۲, ۳]$

۲۰ گزینه ۴

$$\frac{x^۲+۲x}{x-۱} - \frac{۸}{۱} \geq ۰ \Rightarrow \frac{x^۲+۲x-۸x+۸}{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۶x+۸}{x-۱} \geq ۰$$

ریشه‌های صورت $: x^۲ - ۶x + ۸ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۲ \quad , \quad x_۲ = ۴$

ریشه‌های مخرج $: x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$	۱		۲		۴	$+\infty$
$x^۲-۶x+۸$	+		+	۰	−	۰	+
x−۱	−	۰	+		+		+
$\frac{x^۲-۶x+۸}{x-۱}$	−	ت.ن	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x \in (۱, ۲] \bigcup [۴, +\infty)$$

۲۱ گزینه ۳

$$\frac{-x^{۲}+۳x+۱۰}{x^{۳}-۱}>۰ \Rightarrow \frac{-x^{۲}+۳x+۱۰}{(x-۱)(x^{۲}+x+۱)}>۰$$

$$\Rightarrow \frac{x^{۲}-۳x-۱۰}{x-۱}<۰ \Rightarrow p(x)=\frac{(x-۵)(x+۲)}{(x-۱)}<۰$$

$x=۵\,, x=-۲\,, x=۱$

x	$-\infty$		-۲		۱		۵		$+\infty$
$x^{۲}-۳x-۱۰$		+	۰	−		−	۰	+	
$x-۱$		−		−	۰	+		+	
$p(x)$		−	۰	+		−	۰	+	

ت.ن

مجموعه جواب $=(-\infty,-۲)\cup(۱,۵)$

۲۲ گزینه ۳

$x=۰, ۱, ۲$ ریشه‌های صورت و $x=-۱$ ریشهٔ مخرج است. با تشکیل جدول تعیین علامت داریم:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
x		−		−	۰	+		+		+	
$(x-۱)^{۲}$		+		+		+	۰	+		+	
$(x-۲)^{۳}$		−		−		−		−	۰	+	
$\|x+۱\|$		+	۰	+		+		+		+	
عبارت		+		+	۰	−	۰	−	۰	+	

ت.ن

پس مجموعه جواب نامعادله به‌صورت زیر است:

$(-\infty,۰)\cup(۲,+\infty)-\{-۱\}$

۲۳ گزینه ۴

ریشه‌های صورت $x^۳-۴x=۰ \Rightarrow x(x^۲-۴)=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\ x=\pm ۲$

$-x^۲+۳x-۴=۰ \Rightarrow \Delta = ۳^۲-۴(-۱)(-۴)=۹-۱۶=-۷<۰ \Rightarrow \Delta<۰ , a=-۱$

درنتیجه مخرج کسر فاقد ریشه است و همواره منفی است.

ازآنجایی‌که کل کسر مثبت یا صفر است و مخرج منفی است، پس صورت کسر نیز باید منفی یا برابر با صفر باشد.

x		-۲		۰		۲	
صورت کسر	$-$ ج		$+$		$-$ ج		$+$

بنابراین $x \leq -۲$ یا $۲ \leq x \leq ۰$.

۲۴ گزینه ۲

$$p(x)=\frac{(x+۲)^۲(x^۲-۳x+۲)}{(-x^۲+x)^۳} \geq ۰$$

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

$$x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

$$-x^۲+x=۰ \Rightarrow x(-x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

x		-۲		۰		۱		۲	
$(x+۲)^۲$	$+$	۰	$+$		$+$		$+$		$+$
$x^۲-۳x+۲$	$+$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
$(-x^۲+x)^۳$	$-$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$-$
$p(x)$	$-$	۰	$-$		$+$		$+$	۰	$-$
				ت.ن		ت.ن			

مجموعه جواب : $(۰,۱) \cup (۱,۲] \cup \{-۲\}$

۲۵ **گزینه ۲**

ریشهٔ هر عبارت درجه اول را به دست آورده و کل عبارت P را در یک جدول، تعیین علامت می‌کنیم:

$$۳x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$-x+۳=۰ \Rightarrow x=۳ \quad \text{و} \quad x^{۲}+۱>۰$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		۳		$+\infty$
$۳x+۱$		−	۰	+		+		+	
$x-۱$		−		−	۰	+		+	
$-x+۳$		+		+		+	۰	−	
P		+	۰	−	۰	+	ت.ن	−	

توجه کنید که عبارت $x^{۲}+۱$ همواره مثبت است و تأثیری در تعیین علامت ندارد. باتوجه‌به جدول و گزینه‌ها، بازهٔ $(-\frac{۱}{۳}, ۱)$ جواب است.

۲۶ **گزینه ۴**

$$۱-x^{۲}<(۱-x)(۳x+۱) \Rightarrow (۱-x)(۱+x)<(۱-x)(۳x+۱)$$
$$\Rightarrow (۱-x)(۱+x)-(۱-x)(۳x+۱)<۰ \Rightarrow (۱-x)(۱+x-۳x-۱)<۰$$
$$\Rightarrow (۱-x)(-۲x)<۰ \Rightarrow ۲x(x-۱)<۰ \Rightarrow ۰<x<۱$$

باتوجه‌به مجموعهٔ جواب به‌دست‌آمده، هیچ عدد طبیعی در نامعادلهٔ مفروض سؤال صدق نمی‌کند.

۲۷ **گزینه ۱**

از روی نمودار، معادلهٔ این تابع را می‌نویسیم:

برای xهای بزرگ‌تر یا مساوی صفر یک سهمی با رأس $(۱,۱)$ و $c=۲$ داریم. برای عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ خواهیم داشت:

$$c=۲$$
$$\frac{-b}{۲a}=۱ \Rightarrow b=-۲a \quad (۱)$$
$$\frac{-\Delta}{۴a}=۱ \Rightarrow \frac{-(b^۲-۴a(۲))}{۴a}=۱ \Rightarrow \frac{-b^۲+۸a}{۴a}=۱$$
$$\Rightarrow b^۲=۴a \xrightarrow{(۱)} (-۲a)^۲=۴a$$
$$\Rightarrow ۴a^۲=۴a \Rightarrow ۴a(a-۱)=۰ \xrightarrow{a>۰} a=۱$$
$$\xrightarrow{(۱)} b=-۲ \Rightarrow y=x^۲-۲x+۲$$

و برای xهای منفی خطی داریم که از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(-\frac{۱}{۲},۰)$ می‌گذرد معادلهٔ آن را می‌نویسیم:

$$y=۲x+۱$$

حال ضابطهٔ تابع $f(x)$ به دست می‌آید:

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x+۲ & ;x\geq ۰ \\ ۲x+۱ & ;x<۰ \end{cases}$$
$$f(۳)=(۳)^۲-۲(۳)+۲=۵ \ , \ f(۴)=(۴)^۲-۲(۴)+۲=۱۰$$
$$f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱ \ , \ f(-۳/۵)=۲(-۳/۵)+۱=-۶$$

حاصل عبارت : $\frac{۵-(۱۰)}{-(-۱)-۶}=\frac{-۵}{-۵}=۱$

۲۸ **گزینه ۴**

راه‌حل اول:

نکته: رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$، نقطهٔ $S(\frac{-b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴a})$ است.

باتوجه‌به نکتهٔ بالا، مختصات رأس سهمی $y=-۷x^۲+۳x-۱$ عبارت است از:

$$S(\frac{-۳}{-۱۴},\frac{۲۸-۹}{-۲۸}) \Rightarrow S(\frac{۳}{۱۴},\frac{-۱۹}{۲۸})$$

باتوجه‌به اینکه مؤلفهٔ اول رأس، مثبت و مؤلفهٔ دوم آن منفی است، نتیجه می‌گیریم رأس سهمی در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

راه‌حل دوم:

نکته: طول رأس سهمی $y=ax^۲+bx+c$ برابر با $x=\frac{-b}{۲a}$ است و عرض آن از جایگذاری این مقدار در معادلهٔ سهمی به دست می‌آید.

$$y=-۷x^۲+۳x-۱ \Rightarrow x_{\text{رأس}}=\frac{-۳}{۲(-۷)}=\frac{۳}{۱۴}$$
$$\Rightarrow y_{\text{رأس}}=-۷(\frac{۳}{۱۴})^۲+۳(\frac{۳}{۱۴})-۱=\frac{-۹}{۲۸}+\frac{۹}{۱۴}-۱=\frac{-۹+۱۸-۲۸}{۲۸}=\frac{-۱۹}{۲۸}$$

بنابراین مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(\frac{۳}{۱۴},\frac{-۱۹}{۲۸})$ است؛ پس رأس سهمی در ناحیهٔ چهارم قرار دارد.

۲۹ **گزینه ۳**

محور تقارن سهمی $y=ax^۲+bx+c$ خط $x=-\frac{b}{۲a}$ می‌باشد، بنابراین خط $x=\frac{۱}{۴}$ محور تقارن سهمی $y=۲x^۲-x+۵$ است.

۳۰ گزینه ۳

راه‌حل اول:

نکته: معادلهٔ محور تقارن سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$، خط $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

فرض کنیم معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ باشد. طبق فرض نقاط $(۰, ۵)$ و $(-۲, ۵)$ روی این سهمی قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$\begin{cases} ۵ = a(۰) + b(۰) + c \Rightarrow c = ۵ \\ ۵ = a(-۲)^{۲} + b(-۲) + c \xrightarrow{c=۵} ۴a - ۲b = ۰ \Rightarrow b = ۲a \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^{۲} + ۲ax + ۵$ است. باتوجه‌به نکته، خط تقارن این سهمی عبارت است از:

$$x = -\frac{۲a}{۲a} = -۱$$

راه‌حل دوم:

طبق فرض، دو نقطهٔ $(-۲, ۵)$ و $(۰, ۵)$ روی این سـهمی قرار دارند. باتوجه‌به اینکه این دو نقطه دارای عرض یکسان هسـتند، پس نسبت به خط تقارن، قرینهٔ یکدیگرند؛ بنابراین خط تقارن سهمی، همان خط تقارن این دو نقطه است که به‌صورت $x = \frac{-۲+۰}{۲} = -۱$ است.

۳۱ گزینه ۴

معادلهٔ محور تقارن سهمی $y = a'x^{۲} + b'x + c'$ از رابطهٔ $x = -\frac{b'}{۲a'}$ به دست می‌آید.

$$x = -\frac{۱}{۲(a-۱)} = ۲ \Rightarrow a - ۱ = -\frac{۱}{۴}$$
$$y = -\frac{۱}{۴}x^{۲} + x + ۳$$

در تلاقی با محور xها، $y = ۰$ است، پس:

$$y = ۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}x^{۲} + x + ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲} - ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۶)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ x = -۲ \end{cases}$$

پس سهمی در نقطه به طول مثبت ۶ محور xها را قطع می‌کند.

۳۲ **گزینه ۲**

راه‌حل اول:

۱) $x=۱$ محل برخورد نمودار با محور xها است؛ یعنی اگر $x=۱$ باشد، $y=۰$ می‌شود:

$$x=۱\Rightarrow y=۰\Rightarrow ۰=a+b+c$$

۲) $x=۳$ محل برخورد نمودار با محور xها است؛ یعنی اگر $x=۳$ باشد، $y=۰$ می‌شود:

$$x=۳\Rightarrow y=۰\Rightarrow ۰=۹a+۳b+c$$

۳) $y=-۲$ مقدار y در نقطهٔ min است؛ یعنی عرض رأس سهمی است. طول رأس سهمی وسط نقاط برخورد با محور xها واقع می‌شود؛ یعنی $x_s=\frac{۱+۳}{۲}=۲$؛ پس اگر $x=۲$ باشد $y=-۲$ می‌شود. داریم:

$$x=۲\Rightarrow y=-۲\Rightarrow -۲=۴a+۲b+c$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=۰\Rightarrow c=-a-b\\ ۹a+۳b+c=۰\\ ۴a+۲b+c=-۲\end{cases}$$

مقدار c را در دو معادلهٔ دیگر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{c=-a-b}\begin{cases}۹a+۳b-a-b=۰\\ ۴a+۲b-a-b=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۸a+۲b=۰\\ ۳a+b=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۸\end{cases}$$

راه‌حل دوم:

هرگاه $x=\alpha$ و $x=\beta$ محل برخورد نمودار یک تابع درجهٔ ۲ با محور xها باشند، معادله به‌صورت $y=k(x-\alpha)(x-\beta)$ خواهد بود.

در این قسمت باتوجه‌به شکل، $x=۱$ و $x=۳$ محل برخورد با محور xها هستند؛ یعنی می‌توان نوشت:

$$y=k(x-۱)(x-۳)\ ,\ x_s=\frac{۱+۳}{۲}=۲\ ,\ y_s=-۲$$

$$\Rightarrow -۲=k(۲-۱)(۲-۳)\Rightarrow -۲=-k\Rightarrow k=۲$$

$$\Rightarrow y=۲(x-۱)(x-۳)\Rightarrow y=۲x^۲-۸x+۶\Rightarrow\begin{cases}a=۲\\ b=-۸\\ c=۶\end{cases}$$

۳۳ **گزینه ۴**

باتوجه‌به شکل، سهمی روبه‌پایین باز می‌شود؛ پس باید $a<۰$ باشد و گزینهٔ (۱) نادرست است. ثانیاً چون سهمی محور yها را در نقطه‌ای با عرض کمتر از ۵ قطع کرده است، پس گزینهٔ (۳) هم نادرست است؛ اما باتوجه‌به شکل طول رأس این سهمی $x_S=-۲$ است. در گزینه‌های (۲) و (۴) طول رأس را پیدا می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ (۲)}: y=-x^۲-۲x+۴\Rightarrow x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(-۱)}=-۱\ \text{نادرست}$$

$$\text{گزینهٔ (۴)}: y=-\frac{۱}{۲}x^۲-۲x+۳\Rightarrow x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(-\frac{۱}{۲})}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.

۳۴ **گزینه ۲**

نمودار تابع محور xها را در نقاط $x=۱$ و $x=۳$ قطع کرده است، پس ضابطـهٔ تابع را می‌توان به‌صورت $y=a(x-۱)(x-۳)$ نوشت.

ازطرفی نمودار تابع، محور عرض‌ها را در $y=۲$ قطع کرده است، لذا داریم:

$$\xrightarrow[y=۲]{x=۰} ۲=a(۰-۱)(۰-۳)\Rightarrow ۲=۳a\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}(x-۱)(x-۳)=\frac{۲}{۳}(x^{۲}-۴x+۳)=\frac{۲}{۳}x^{۲}-\frac{۸}{۳}x+۲$$

$$\Rightarrow y_{\min}=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{(\frac{۸}{۳})^{۲}-۴\times\frac{۲}{۳}\times ۲}{۴\times\frac{۲}{۳}}=-\frac{\frac{۶۴}{۹}-\frac{۱۶}{۳}}{\frac{۸}{۳}}=-\frac{\frac{۱۶}{۹}}{\frac{۸}{۳}}\Rightarrow y_{\min}=-\frac{۲}{۳}$$

همچنین برای پیدا کردن $y_{\min}$ می‌توانید طول رأس سهمی، یعنی $x=\frac{۱+۳}{۲}=۲$ را در ضابطه قرار دهید.

۳۵ **گزینه ۴**

نکته: جدول تعیین علامت عبارت $ax^{۲}+bx+c$ که دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱<x_۲)$ می‌باشد، به‌صورت زیر است:

x		$x_۱$		$x_۲$	
$ax^{۲}+bx+c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

ابتـدا باتوجه‌به جـدول داده‌شده، علامت چندجمله‌ای درجهٔ دوم $-P(x)$ را به دست می‌آوریم:

x		a		b	
P(x)	+	۰	−	۰	+
−P(x)	−	۰	+	۰	−

باتوجه‌به جدول، نمودار $-P(x)$ در نقاط $x=a$ و $x=b$ محور xها را قطع می‌کند و فقط در بازهٔ (a,b) دارای علامت مثبت است؛ بنابراین پاسخ گزینهٔ ۴ است.

۳۶ **گزینه ۴**

همان‌طور که از شـکل مشـخص است، محور تقارن سـهمی، خط $x=۲$ است. ازطرفی در سـهمی به معادلـهٔ $y=a'x^{۲}+b'x+c'$، معادلهٔ محور تقارن از رابطهٔ $x=-\frac{b'}{۲a'}$ به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$x=\frac{-a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۴$$

ازطرفی نقطهٔ $(۲,-۱)$ بر روی سهمی قرار دارد؛ بنابراین مختصات نقطهٔ موردنظر در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$y=x^{۲}-۴x+b\xrightarrow{(۲,-۱)}-۱=۴-۸+b\Rightarrow b=۳$$

$$\Rightarrow a+b=-۴+۳=-۱$$

۳۷ **گزینه ۳**

رأس سهمی نقطهٔ $(-۲ , -۱)$ است و سهمی روبه‌پایین است، پس معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y = k(x + ۲)^{۲} - ۱ \quad , \quad (k < ۰)$$

همچنین سهمی از نقطهٔ $(-۱, -۲)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ سهمی صدق می‌کند:

$$-۲ = k(-۱ + ۲)^{۲} - ۱ \Rightarrow -۲ = k(۱)^{۲} - ۱ \Rightarrow k = -۱$$

درنتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y = -(x + ۲)^{۲} - ۱ \Rightarrow y = -(x^{۲} + ۴x + ۴) - ۱$$
$$\Rightarrow y = -x^{۲} - ۴x - ۵$$

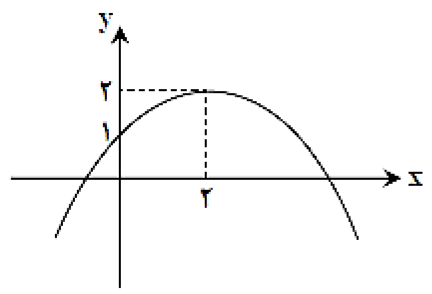
۳۸ **گزینه ۴**

نقطهٔ (۲,۲) رأس سهمی است، بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت زیر است:

$$y = a(x - ۲)^{۲} + ۲$$

باتوجه‌به شکل، نقطهٔ (۰,۱) روی سهمی قرار دارد، با جایگذاری مختصات این نقطه در معادلهٔ سهمی داریم:

$$۱ = a(۰ - ۲)^{۲} + ۲ \Rightarrow ۴a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$



بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = -\frac{۱}{۴}(x - ۲)^{۲} + ۲$ است. با جایگذاری نقاط داده شده در گزینه‌ها، فقط نقطهٔ $(۳, \frac{۷}{۴})$ روی این سهمی قرار دارد.

۳۹ **گزینه ۳**

راه‌حل اول:

چون دهانهٔ سهمی روبه‌پایین باز می‌شود، پس $a < ۰$ و گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست‌اند. باتوجه‌به شکل، رأس سهمی در ناحیهٔ اول قرار دارد، یعنی طول و عرض رأس، مثبت هستند.

در گزینهٔ "۳" داریم:

$$y = -x^{۲} + ۴x + ۵ \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲$$

در گزینهٔ "۴" داریم:

$$y = -x^{۲} - ۴x + ۵ \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۴)}{۲(-۱)} = -۲$$

پس گزینهٔ "۳" درست است.

راه‌حل دوم:

نقطهٔ $(-۱, ۰)$ فقط در معادلهٔ منحنی گزینهٔ "۳" صدق می‌کند.

۴۰ گزینه ۴

راه‌حل اول:

نکته: علامت عبارت $y = ax + b$ برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود:

که در آن $-\frac{b}{a}$ ریشهٔ معادلهٔ $y = ۰$ و a شیب‌خط است.

x		$-\frac{b}{a}$	
y	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

در نمودار داده شـده خط محور xهـا را در نقطه‌ای به طول ۲ قطـع کرده است، پس $x = ۲$ ریشهٔ معادلهٔ $y = ۰$ است. از طرفی چون خط با قسمت مثبت محور xها زاویه‌ای کوچک‌تر از ۹۰° می‌سازد، پس شیب‌خط یعنی علامت a مثبت است.

پس پاسخ گزینهٔ ۴ است.

راه‌حل دوم:

همـان‌طور که از نمودار مشـخص است، مقادیر خط به ازای $x > ۲$ مثبـت، پس به ازای $x < ۲$ منفی و بـه ازای $x = ۲$ صفر است، بنابراین گزینهٔ ۴ درست است.

راه‌حل سوم:

نکته: به محل تقاطع هر خط با محور yها، عرض از مبدأ خط می‌گویند.

نکته: معادلهٔ خطی با شیب a و عرض از مبدأ b برابر است با: $y = ax + b$

باتوجه‌به نمودار، خط از نقطهٔ $(۲, ۰)$ و $(۰, -۱)$ می‌گذرد، پس شیب آن برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۰-(-۱)}{۲-۰}$ می‌باشد. از طرفی عرض از مبدأ خط برابر ۱- است، پس مطابق نکته معادلهٔ آن به‌صورت $y = \frac{۱}{۲}x - ۱$ می‌باشد. حال باتوجه‌به نکتهٔ راه‌حل اول، خط را تعیین علامت می‌کنیم.

x		۲	
y	−	۰	+

۴۱ گزینه ۴

تذکر: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ ,\ b \neq ۰$

$$\left|\frac{۱ - ۲x}{۲x + ۳}\right| > ۱ \Rightarrow \frac{|۱ - ۲x|}{|۲x + ۳|} > ۱$$

چون عوامل مثبت هستند، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{|۱ - ۲x|}{|۲x + ۳|} > ۱ \xrightarrow{x \neq -\frac{۳}{۲}} |۱ - ۲x| > |۲x + ۳|$$

چون دو طرف مثبت هستند به توان دو می‌رسانیم:

$$(۱ - ۲x)^۲ > (۲x + ۳)^۲ \Rightarrow ۱ - ۴x + ۴x^۲ > ۴x^۲ + ۱۲x + ۹ \Rightarrow ۱۶x < -۸ \Rightarrow x < -\frac{۱}{۲}$$

جواب نامعادله عبارت است از $(-\infty, -\frac{۱}{۲}) - \{-\frac{۳}{۲}\}$ و گزینهٔ ۴ زیرمجموعهٔ جواب فوق است.

۴۲ **گزینه ۴**

برای نامعادلهٔ قدر مطلق داریم:

$$\left|\frac{x-۱}{۲}-۲\right| \geq ۲ \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۱}{۲}-۲ \geq ۲ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} \geq ۴ \\ \text{یا} \\ \frac{x-۱}{۲}-۲ \leq -۲ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} \leq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱ \geq ۸ \Rightarrow x \geq ۹ \\ \text{یا} \\ x-۱ \leq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \end{cases} \Rightarrow \text{جواب} : (-\infty, ۱] \bigcup [۹, +\infty)$$

۴۳ **گزینه ۲**

$$\left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right| > ۱ \Rightarrow \left(\frac{۲-x}{۲x-۳}\right)^۲ > ۱ \xrightarrow{x \neq \frac{۳}{۲}} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰ \Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{۴ \pm \sqrt{۴^۲ - ۱۵}}{۳} \Rightarrow x_{۱,۲} = ۱, \frac{۵}{۳}$$

x		۱		$\frac{۵}{۳}$	
۳x^۲-۸x+۵	+	۰	−	۰	+

$$\Rightarrow x = (۱, \frac{۵}{۳})$$

۴۴ **گزینه ۴**

$$|۲x+۱| > ۵ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱ > ۵ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow x > ۲ \\ \text{یا} \\ ۲x+۱ < -۵ \Rightarrow ۲x < -۶ \Rightarrow x < -۳ \end{cases}$$

جواب نامعادله : $\{x > ۲\} \bigcup \{x < -۳\}$

مجموعه جواب : $R - [-۳, ۲]$

۴۵ **گزینه ۱**

نکته: فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:

$$۱)\ |u| \le a \Rightarrow -a \le u \le a$$

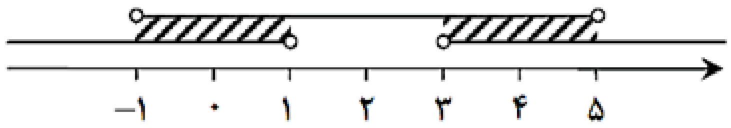
$$۲)\ |u| \ge a \Rightarrow u \ge a \ \text{یا}\ u \le -a$$

باتوجه‌به این نکته می‌توان نوشت:

$$||x-۲|-۲| < ۱ \Rightarrow -۱ < |x-۲|-۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < |x-۲| < ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < x-۲ < ۳ \Rightarrow -۱ < x < ۵ \quad (۱) \\ |x-۲| > ۱ \Rightarrow x-۲ > ۱ \ \text{یا}\ x-۲ < -۱ \Rightarrow x > ۳ \ \text{یا}\ x < ۱ \quad (۲) \end{cases}$$

حال به کمک محور، اشتراک (۱) و (۲) را به دست می‌آوریم:



بنابراین مجموعه جواب این نامعادله $(۳,۵) \cup (-۱,۱)$ است.

۴۶ **گزینه ۱**

$$\frac{|۲x-۳|}{|x+۲|} \le ۲ \xrightarrow{x \ne -۲} |۲x-۳| \le ۲|x+۲| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (۲x-۳)^۲ \le ۴(x+۲)^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۹ - ۱۲x \le ۴x^۲ + ۱۶x + ۱۶ \Rightarrow -۲۸x \le ۷$$

$$\Rightarrow x \ge -\frac{۱}{۴} \Rightarrow x \in [-\frac{۱}{۴}, +\infty) \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

۴۷ **گزینه ۲**

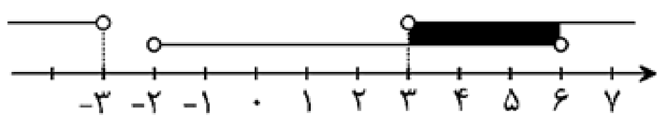
ابتدا نامعادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$|x-۲| < ۲ \Rightarrow -۲ < x-۲ < ۲ \Rightarrow ۰ < x < ۴$$

پس $b = ۴$ و $a = ۰$ است. حال اشتراک جواب‌های دو نامعادلهٔ $|x-۲| < ۴$ و $|x-۰| > ۳$ را به دست می‌آوریم.

$$|x-۲| < ۴ \Rightarrow -۴ < x-۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۶$$

$$|x| > ۳ \Rightarrow x > ۳ \ \text{یا}\ x < -۳$$



اشتراک جواب‌ها، بازهٔ $(۳, ۶)$ است.

۴۸ **گزینه ۱**

نکته: فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد، در این صورت:

۱) اگر $|u| \leq a$، آنگاه: $-a \leq u \leq a$

۲) اگر $|u| \geq a$، آنگاه: $u \geq a$ یا $u \leq -a$

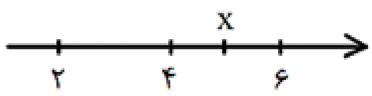
باتوجه‌به نکته می‌توان نوشت:

$$|x-۳| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x-۳ \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۵$$

اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ در این بازه قرار دارند؛ بنابراین گزینهٔ ۱ درست است.

۴۹ **گزینه ۱**

اگر x جواب باشد، فاصلهٔ آن از عدد ۴ برابر $|x-۴|$ است و باید کمتر از ۲ باشد، پس $|x-۴| < ۲$.



۵۰ **گزینه ۴**

$$|۱-|x-۱|| < ۱ \Rightarrow -۱ < ۱-|x-۱| < ۱$$
$$\Rightarrow -۱ < |x-۱|-۱ < ۱ \Rightarrow ۰ < |x-۱| < ۲$$

۵۱ **گزینه ۲**

اگر $a > ۰$ آنگاه از $|x| < a$ نتیجه می‌شود $-a < x < a$، پس:

$$||x|-۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < |x|-۲ < ۳ \xrightarrow{+۲} -۱ < |x| < ۵$$

چون نامعادلهٔ $|x| > -۱$ برای هر x درست است، پس کافی است نامعادلهٔ $|x| < ۵$ را حل کنیم که مجموعه جواب آن $\{x| -۵ < x < ۵\}$ است که ۹ عدد صحیح $\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$ در این مجموعه وجود دارد.

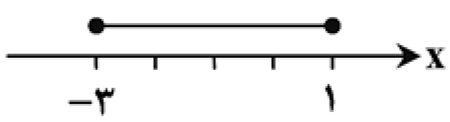
۵۲ **گزینه ۴**

نکته: با فرض $a > ۰$، داریم:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$|x+۱| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x+۱ \leq ۲ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۱$$



۵۳ **گزینه ۲**

$$x \in R - [-۳\,,۲] \Rightarrow \{x > \underbrace{۲}_{\beta}\}\bigcup\{x < \underbrace{-۳}_{\alpha}\}$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{\alpha+\beta}{۲}\right| > \frac{\beta-\alpha}{۲} \Rightarrow \left|x - \frac{۲-۳}{۲}\right| > \frac{۲-(-۳)}{۲}$$

$$\Rightarrow \left|x - (-\frac{۱}{۲})\right| > \frac{۵}{۲} \Rightarrow \left|x + \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲\left|x + \frac{۱}{۲}\right| > ۵$$

$$\Rightarrow \left|۲x + ۲(\frac{۱}{۲})\right| > ۵ \Rightarrow |۲x+۱| > ۵ \Rightarrow a = ۲\,,\ b = ۱$$

$$\Rightarrow a + b = ۳$$

۵۴ **گزینه ۴**

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم: $|x| = \begin{cases} x & ;x \geq ۰ \\ -x & ;x < ۰ \end{cases}$

گام دوم

عبارت $x^۲ + ۱$ همواره مثبت است؛ بنابراین:

$$|x^۲+۱| = x^۲+۱$$

نامعادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر می‌شود:

$$۲x + ۱ - |x-۲| > x^۲ + ۱$$

نامعادله را در دو حالت $x \geq ۲$ و $x < ۲$ حل می‌کنیم:

$$(I)\quad x \geq ۲ \ \Rightarrow\ x - ۲ \geq ۰ \ \Rightarrow\ |x-۲| = x-۲$$

$$۲x+۱-(x-۲) > x^۲+۱ \ \Rightarrow\ ۲x+۱-x+۲ > x^۲+۱ \ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow\ (x-۲)(x+۱) < ۰$$

$\Rightarrow\ -۱ < x < ۲ \xrightarrow{x \geq ۲}$ x هیچ مقداری نمی تواند داشته باشد

$$(II)\quad x < ۲ \ \Rightarrow\ x-۲ < ۰ \ \Rightarrow\ |x-۲| = -(x-۲)$$

$$۲x+۱+x-۲ > x^۲+۱ \ \Rightarrow\ x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \ \Rightarrow\ (x-۲)(x-۱) < ۰ \ \Rightarrow\ ۱ < x < ۲ \xrightarrow{x<۲} ۱ < x < ۲$$

اجتماع دو مجموعه جواب به‌دست‌آمده؛ یعنی بازهٔ $(۱,۲)$، مجموعه جواب نامعادلهٔ $۲x + ۱ - |x-۲| > |x^۲+۱|$ می‌شود.

۵۵ **گزینه ۳**

$$(x+۲)^۲ = (۳x-۱)^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+۲) = (۳x-۱) \Rightarrow -۲x = -۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \\ (x+۲) = -(۳x-۱) \Rightarrow ۴x = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $= \frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۶-۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$

۵۶ **گزینه ۳**

$$|۲x+۱|<۳x-۴ \xrightarrow{۳x-۴>۰} -(۳x-۴)<۲x+۱<۳x-۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۳x+۴<۲x+۱ \\ ۲x+۱<۳x-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵x>۳ \Rightarrow x>\frac{۳}{۵} \\ x>۵ \end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک}: x>۵$$

همچنین باید $\frac{۴}{۳} < x \Leftarrow ۰ < ۴ - ۳x$ باشد که برقرار است، درنتیجه:

$$\text{مجموعه جواب} = (۵,+\infty)$$

۵۷ **گزینه ۱**

مجموعه جواب این نامعادله را می‌یابیم:

$$۱)\, x \geq ۱ \Rightarrow x-۱<x+۱ \Rightarrow -۱<۱ \text{ همواره برقرار است} \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = [۱,+\infty)$$

$$۲)\, x<۱ \Rightarrow -x+۱<x+۱ \Rightarrow -۲x<۰ \xrightarrow{x<۱} ۰<x<۱$$

بنابراین همهٔ اعداد طبیعی در این نامعادله صدق می‌کنند.

۵۸ **گزینه ۱**

سن برادر کوچک‌تر را x و سن برادر بزرگ‌تر را y در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y-x=۷ \Rightarrow y=x+۷ \\ (y+۵)(x+۵)=۱۴۴ \end{cases} \Rightarrow (x+۱۲)(x+۵)=۱۴۴$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۱۷x+۶۰=۱۴۴ \Rightarrow x^{۲}+۱۷x-۸۴=۰$$

$$\Rightarrow (x+۲۱)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ & \text{ق.ق} \\ x=-۲۱ & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

۵۹ **گزینه ۲**

$$x^{۲}+۴y^{۲}=۴xy \Rightarrow x^{۲}-۴xy+۴y^{۲}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x-۲y)^{۲}=۰ \Rightarrow x-۲y=۰$$

$$\Rightarrow x=۲y \xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{x}{y}=۲$$

۶۰ **گزینه ۳**

اگر اضلاع مستطیل را x و y فرض کنیم:

$$\begin{cases} ۲(x+y) = ۳۰ \Rightarrow y = ۱۵ - x \\ xy = ۵۴ \Rightarrow x(۱۵-x) = ۵۴ \Rightarrow x^{۲} - ۱۵x + ۵۴ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x-۹) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \Rightarrow y = ۹ \\ x = ۹ \Rightarrow y = ۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طول قطر} = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} = \sqrt{۸۱ + ۳۶} = \sqrt{۱۱۷} = ۳\sqrt{۱۳}$$