

مسابقه ریاضی - ستاره دنباله دار بنفش

مسائل دبیرستان

حق چاپ و انتشار برای تیتو اندر یسکو و جاناتان کین محفوظ است

مسئله 1

در پنج سال آینده تام دو برابر سن سیندی را خواهد داشت. سیزده سال قبل تام سه برابر سن سیندی را داشت. در چند سال قبل تام چهار برابر سن سیندی را داشت؟

.....

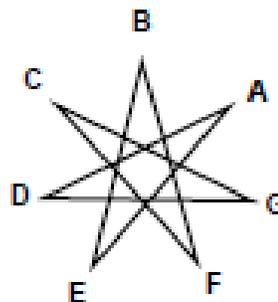
مسئله 2

کوچک ترین عدد صحیح مثبت n را چنان پیدا کنید که برای هر عدد اول p ، $p^2 + n$ هرگز اول نباشد.

.....

مسئله 3

در نمودار ABCDEFG یک هفت ضلعی منتظم (یک چند ضلعی با هفت ضلع) است. آن چه نشان داده شده ستاره AEBFCGD است. اندازه زاویه باز تشکیل شده توسط AE و CG بر حسب درجه $\frac{m}{n}$ است که m و n اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول اند. $m+n$ را پیدا کنید.



.....

مسئله 4

سه کیسه مهره در اختیار است. کیسه شماره 2 دو برابر کیسه شماره 1 مهره دارد. کیسه شماره 3 سه برابر کیسه شماره 1 مهره دارد. نصف مهره های کیسه 1، یک سوم مهره های کیسه 2 و یک چهارم مهره های کیسه 3 سبز هستند. اگر تمام مهره های سه کیسه روی هم کپه شوند، $\frac{m}{n}$ از مهره های کپه سبز خواهد بود که m و n اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول اند. $m+n$ را پیدا کنید.

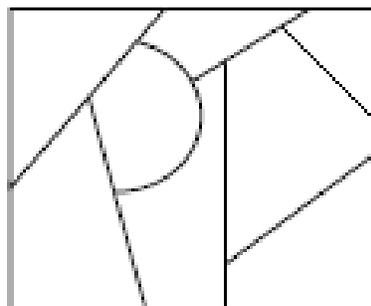
مسأله 5

$$n \text{ را چنان پیدا کنید که } (4^{n+7})^3 = (2^{n+23})^4$$

.....

مسأله 6

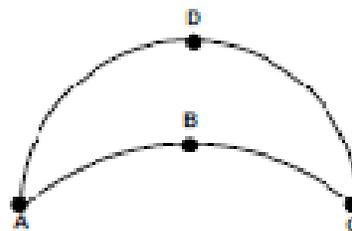
ایالت وایلز شامل 8 شهرک ، همان طور که روی نقشه نشان داده شده ، است. اگر 4 رنگ در اختیار باشد به چند طریق می توان این نقشه را رنگ کرد، به طوری که هر شهرک با یک رنگ ، رنگ شده باشد و هیچ دو شهرکی که مرز مشترک دارند با یک رنگ ، رنگ نشده باشند؟



.....

مسأله 7

شکل ABCD توسط نیم دایره CDA و ربع دایره ABC تشکیل شده است. اگر فاصله A تا C برابر 18 باشد مساحت این شکل را پیدا کنید.



.....

مسأله 8

کوچکترین عدد صحیح مثبت را پیدا کنید که دقیقاً 20 مقسوم علیه صحیح مثبت دارد.

.....

مسأله 9

بیل 13 دفترچه، 26 پنس و 19 خودکار را 25 دلار خرید. پولا 27 دفترچه، 18 پنس و 31 خودکار را 31 دلار خرید. خرید 24 دفترچه، 120 پنس و 52 خودکار برای گری چند دلار تمام خواهد شد؟

.....

مسأله 10

برج ها در نقاطی در امتداد یک خط رشد می کنند. تمام برج ها با ارتفاع 5 و با سرعت یک متر در ثانیه رشد می کنند. به مجرد اینکه دو برج مجاور هر یک حداقل یک متر ارتفاع دارند، یک برج جدید در نقطه ای در امتداد آن خط دقیقاً وسط (بین) آن دو برج مجاور شروع به رشد می کند. قبل از زمان 0 هیچ برجی وجود ندارد اما در زمان 0 اولین دو برج در دو نقطه در امتداد خط شروع به رشد می نمایند. مجموع ارتفاع تمام برج ها را در زمان 10 ثانیه پیدا کنید.

.....

مسأله 11

چهار نقطه $A(-1,2)$ ، $B(3,-4)$ ، $C(5,-6)$ و $D(-2,8)$ در صفحه مختصات قرار دارند. کمترین مقدار ممکن برای $PA+PB+PC+PD$ را روی تمام نقاط P حساب کنید.

.....

مسأله 12

کمترین مجموع ممکن برای دو عدد صحیح مثبت a, b که $a \cdot b = 10!$ چیست؟

.....

مسأله 13

گرتا در حال اتمام یک پروژه هنری است. او دارای 12 صفحه کاغذ است : چهار قرمز، چهار سفید و چهار آبی. او همچنین 12 کاغذ ستاره ای دارد : چهار قرمز، چهار سفید و چهار آبی. او به طور تصادفی یک ستاره را روی هر صفحه کاغذ قرار می دهد. احتمال اینکه هیچ ستاره ای روی یک صفحه کاغذ هم رنگ آن قرار گیرد $\frac{m}{n}$ است که m, n اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اولند. $n-100m$ را پیدا کنید.

.....

مسأله 14

فرض کنید ABCD یک دوزنقه با AB موازی CD ، AB با طول یک، و CD با طول 41 باشد. فرض کنید نقاط X,Y ، به ترتیب، روی اضلاع AD و BC قرار داشته باشند به قسمی که XY موازی AB و CD و XY دارای طول 31 باشد. فرض کنید m, n دو عدد صحیح مثبت نسبت به هم اول باشند به طوری که نسبت مساحت ABXY به مساحت CDXY برابر $\frac{m}{n}$ باشد. $m+2n$ را پیدا کنید.

.....

مسأله 15

باقیمانده تقسیم 78^9 بر 1000 چیست؟

.....

مسأله 16

فرض کنید $z = \cos \frac{1}{1000} + i \cdot \sin \frac{1}{1000}$. کوچکترین عدد صحیح مثبت n را چنان پیدا کنید که z^n دارای قسمت موهومی بیشتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

.....

مسأله 17

چند سه تایی مرتب (a,b,c) از اعداد صحیح مثبت فرد در شرط $a+b+c=25$ صدق می کند.

.....

مسأله 18

روی مثلث ABC نقطه D را روی AB چنان بگیرید که ارتفاع مثلث باشد و E نقطه ای روی BC چنان باشد که AE نیمساز زاویه BAC باشد. فرض کنید G نقطه برخورد AE و CD باشد. فرض کنید نقطه F محل برخورد ضلع AC و شعاع BG باشد. اگر AB دارای طول 28 و AC دارای طول 14 و CD دارای طول 10 باشد آنگاه طول CF می تواند به صورت $\frac{k+m\sqrt{r}}{n}$ نوشته شود که k,m,n,r اعداد صحیح مثبت هستند، k,n نسبت به هم اول و r بر مربع هیچ عدد اولی بخش پذیر نیست. $K-m+n+r$ را پیدا کنید.

.....

مسأله 19

اگر a, b اعداد مختلط باشند به طوری که $a^2 + b^2 = 5$ و $a^3 + b^3 = 7$ آنگاه مجموعشان $a + b$ ، حقیقی و بزرگترین مقدار ممکن برای مجموع $a + b$ برابر $\frac{m + \sqrt{n}}{2}$ باشد که m و n اعداد صحیح هستند، n را پیدا کنید.

.....

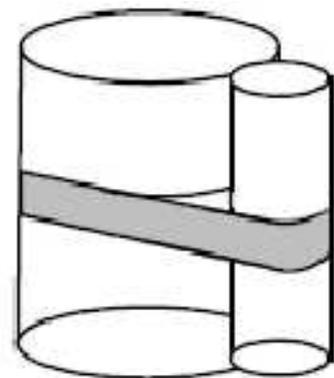
مسأله 20

5 مرد و 7 زن به طور تصادفی در یک ردیف ایستاده اند، فرض کنید m و n اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول باشند به طوری که $\frac{m}{n}$ احتمال ایستادن هر مرد حداقل در کنار یک زن باشد، $m + n$ را پیدا کنید.

.....

مسأله 21

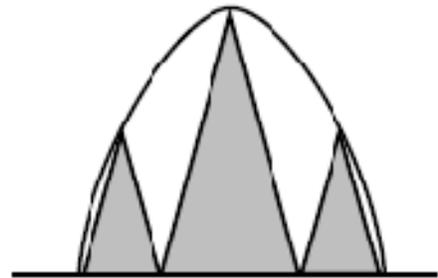
یک استوانه به شعاع 12 و یک استوانه به شعاع 36 با نواری محکم به همدیگر چسبانده شده اند، طول نوار $m\sqrt{k} + n\pi$ است که m ، k و n اعداد صحیح مثبت هستند و k بر مربع هیچ عدد اولی بخش پذیر نیست، $m + k + n$ را پیدا کنید.



.....

مسأله 22

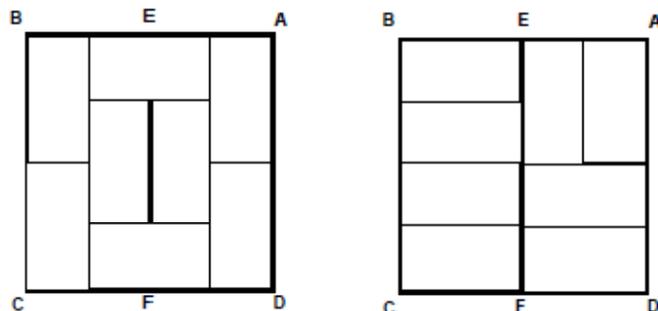
نمودار زیر یک سهمی، یک خط عمود به محور تقارن سهمی، و سه مثلث متساوی الساقین را که هر یک با یک قاعده روی خط افقی و رأس روی سهمی نشان می دهد. دو مثلث کوچکتر متشابه اند و هر یک دارای یک رأس قاعده روی سهمی و یک رأس مشترک با مثلث بزرگتر هستند. نسبت ارتفاع مثلث بزرگتر به ارتفاع مثلث های کوچکتر $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ است که a ، b و c اعداد صحیح مثبت هستند و a و c نسبت به هم اولند. $a+b+c$ را پیدا کنید.



مسأله 23

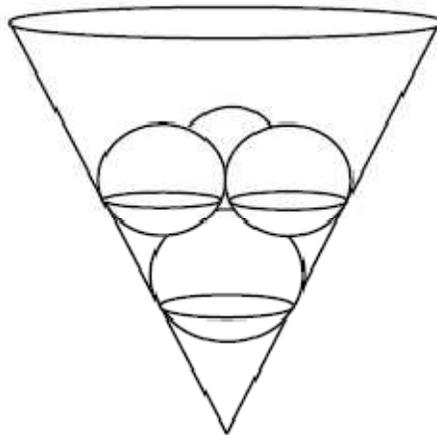
مربع ABCD دارای طول ضلع 4 است. نقاط E و F به ترتیب وسط اضلاع AB و CD هستند. 8 مستطیل یک در دو داخل این مربع چنان قرار گرفته اند که هیچ دو تا از این 8 مستطیل همپوشی ندارند (شکل را ببینید).

اگر آرایش 8 مستطیل به طور تصادفی انتخاب شوند آنگاه اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول m و n وجود دارند به طوری که $\frac{m}{n}$ احتمال آن است که هیچ مستطیلی پاره خط EF را قطع نکند (همانند ترتیب سمت راست). $m+n$ را پیدا کنید.



مسأله 24

یک مخروط مدور قائم مطابق شکل ، تشکیل زاویه 60° در راس داده است. کره S با شعاع یک، داخل این مخروط قرار داده شده است به طوری که بر کناره های مخروط مماس است. سه کره متشابه در این مخروط و بالای کره S چنان قرار گرفته اند که تمام بر یکدیگر، بر کره S و به کنار مخروط مماسند. شعاع این کره های متشابه می تواند به صورت $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ نوشته شود که a, b, c اعداد صحیح مثبت اند، به طوری که a, c نسبت به هم اولند. $a+b+c$ را پیدا کنید.



مسأله 25

چند جمله ای $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_8x^8 + 2009x^9$ دارای این ویژگی است که برای $k=1,2,3,\dots,9$ ، $P\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$. اعداد صحیح مثبت نسبت به هم اول m, n وجود دارند به قسمی که ، $P\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{m}{n}$. $n - 10m$ را پیدا کنید.