

Purpel Comet! Math Meet
 آوریل ۲۰۱۳
 مساله های مقطع دبیرستان
 Titu Andreescu and Jonathan Kane: حق کپی رایت:
 مترجمان: شیرین ملک پور، انارام شهروان

مساله یک:
 ۲ سال قبل تام از مری ۲۵ درصد کوتاه تر بود. از آن زمان قد تام ۲۰ درصد و قد مری ۴ اینچ بلند شده است. الان مری ۲۰ درصد از تام بلند تر است. قد تام چند اینچ است؟

مساله دو:
 دیاگرام این مساله یک ۸ ضلعی ABCDEFGH با ضلعهای ۸ و ۱۵ و ۸ و ۸ و ۶ و ۸ و ۲۹ را نشان می دهد (رجوع شود به شکل ۱ در انتهای سوالات). همه ی زوایا قائمه هستند. نقطه ی B را به D و E را به G وصل کنید تا یک شش ضلعی ABDEGH به دست آید. محیط ABDEGH را پیدا کنید.

مساله سه:
 می خواهیم ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ را به صورت یک کوه بنویسیم. منظور از کوه این است که ارقام یک رشته ی صعودی باشند تا قله و بعد یک رشته ی نزولی. دو مثال ۱۲۹۸۷۶۵۴۳ یا ۲۵۸۹۷۶۴۳۱. به چند صورت می توان چنین کاری را کرد؟

مساله چهار:
 بزرگترین مقسوم علیه مشترک n و ۱۸۰ عدد ۱۲ است. کوچکترین مضرب مشترک n و ۱۸۰ عدد ۷۲۰ می باشد. n را پیدا کنید.

مساله پنج: چند عدد ۴ رقمی مثبت که دقیقا یک رقمشان ۱ و دقیقا یک رقمشان ۳ است وجود دارد؟

مساله شش:
 ۴ سال دیگر سن 'کی' ۲ برابر سن 'گردن' خواهد بود. ۴ سال بعد از آن سن 'شان' ۲ برابر سن 'کی' خواهد بود. ۴ سال بعد از آن سن 'شان' ۳ برابر سن 'گردن' خواهد بود. سن 'شان' هم اکنون چند سال است؟

مساله هفت :
 کوچکترین عدد شش رقمی پالیندرم که مضرب ۴۵ است را پیدا کنید. عدد پالیندرم یا متقارن عددی است که از چپ به راست مثل راست به چپ خوانده می شود مثل ۱۴۴۱ یا ۳۵۲۵۳.

مساله هشت :
 'نایمی' ۳ رنگ دارد که یک نقش را رنگ کند (رجوع شود به شکل ۲ در انتهای سوالات). او هر قطعه را یک رنگ می کند و از هر رنگ حداقل یک بار استفاده می کند. اگر 'نایمی' دو قطعه مجاور را بتواند یک رنگ بکند چند جور متفاوت می تواند این نقش را رنگ کند؟

مساله نه:
 $|x - 8| \leq 5x^2 - \frac{2}{5}$ شرط لازم و کافی است برای $x \in [a, b]$.

دو عدد مثبت نسبت به هم اول m, n را داریم به طوری که

$$b - a = \frac{m}{n}$$

$$m + n$$

را پیدا کنید.

مساله ده:

عدد N حاصل ضرب ۲ عدد اول است. حاصل جمع مقسوم علیه های مثبت N که کوچکتر از N هستند ۲۰۱۴ است. عدد N را پیدا کنید.

مساله یازده:

'جنیفر' بعد از این که r درصد از مسیر خانه تا مغازه را رفت به خانه برگشت و دوچرخه اش را برداشت. سپس با دوچرخه به مغازه رفت و به خانه بازگشت. سرعت دوچرخه سواری 'جنیفر' دو و نیم برابر سرعت راه رفتن اوست. بزرگترین مقدار r را طوری پیدا کنید به طوری که برگشتن به خانه با دوچرخه از راه رفتن به مغازه و برگشتن به خانه آهسته تر نباشد.

مساله دوازده:

چند عدد صحیح چهار رقمی وجود دارد که دارای دو رقم مجاور زوج مساوی نباشند. به عنوان مثال ۱۱۶۴ و ۲۰۳۵ چنین اعدادی هستند و ۶۴۴۷ و ۵۸۶۶ نیستند.

مساله سیزده:

فرض کنید اعداد m و n نسبت به هم اول هستند و $\frac{m}{n} = \log_4(32^{\log_4 3})$ را پیدا کنید

مساله چهارده:

چند سه تایی مرتب a, b, c وجود دارد در صورتی که a, b, c اعداد مثبت و $a \leq b \leq c$ و $a.b.c = 1000$ ؟

مساله پانزده:

برای کدام مقادیر x دترمینان مطرح در این مساله ۲۰۱۳ است؟

$$\begin{vmatrix} 5+x & 8 & 2+x \\ 1 & 1+x & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

مساله شانزده:

ابعاد مربع داده شده در شکل ۳ (رجوع شود به شکل ۳ در انتهای سوالات) ۹۰ در ۹۰ است و هر ضلع به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده است. بعضی از نقاط روی اضلاع با خط مستقیم به هم وصل شده اند. مساحت قطعات رنگ شده را پیدا کنید.

مساله هفده:

بسط اعشاری $\frac{m}{n}$ برای دو عدد صحیح و مثبت m و n با 0.711 شروع می شود. این بسط اعشاری با اعداد دیگر ادامه می یابد. کوچکترین عدد ممکن n را پیدا کنید.

مساله هجده:

دو دایره هم مرکز شعاع ۱ و ۴ دارند. شش دایره هم اندازه و مماس به هم داخل دایره ی بزرگ و خارج دایره ی کوچک وجود دارند. (شکل ۴ را در انتهای سوالات ببینید) ۳ دایره با رنگ خاکستری کم رنگ از داخل مماس به دایره با شعاع ۴ هستند در حالی که ۳ دایره ی تیره تر مماس به دایره با شعاع ۱ هستند. شعاع ۶ دایره کوچک $\frac{k+\sqrt{m}}{n}$ است. به صورتی که m, n, k اعداد صحیح مثبت و k, n نسبت به هم اول باشند، $k+m+n$ را پیدا کنید.

مساله نوزده:

تعدادی تخم مرغ داریم. وقتی 'جول' تخم مرغ ها را می شمرد، شمارش او یکی در یکان عدد اشتباه می شود. وقتی 'تام' تخم مرغ ها را شمرد، شمارش او یکی در دهگان عدد اشتباه بود. وقتی 'رایول' تخم مرغ ها را شمرد، شمارش او یکی در صدگان عدد اشتباه بود. 'ساشا'، 'حوزه'، 'پیترو' و 'موریس' تخم مرغ ها را شمردند، هر کدام شمارشان درست بود. وقتی این هفت نفر شمارششان را به هم افزودند عدد ۳۱۶۲ بدست آمد. چند تا تخم مرغ وجود داشت؟

مساله بیست:

فرض کنید z یک عدد موهومی (مختلط) است که: $(z + \frac{1}{z})(z + \frac{1}{z} + 1) = 1$ پیدا کنید $(z^{100} + \frac{1}{z^{100}} + 3)(z^{100} + \frac{1}{z^{100}} + 1)$

مساله بیست و یک:

حل کنید $(2 - \sec^2 1^\circ)(2 - \sec^2 2^\circ)(2 - \sec^2 3^\circ) \dots (2 - \sec^2 89^\circ)$

مساله بیست و دو:

کوچکترین عدد سه رقمی را پیدا کنید که مساوی با حاصل جمع ارقامش به علاوه ی ۲ برابر حاصل ضرب ارقامش باشد.

مساله بیست و سه:

شکل ۵ (رجوع شود به شکل ۵ در انتهای سوالات) یک شش ضلعی منظم $BCFGHJ$ را محاط در یک مستطیل $ADFI$ نشان می دهد. فرض کنید θ زاویه ی حاده بین ضلع EG شش ضلعی و قطر AF مستطیل می باشد. فرض کنید که دو عدد صحیح مثبت نسبت به هم اول وجود دارد که $m + n \cdot \sin^2 \theta = \frac{m}{n}$ را پیدا کنید.

مساله بیست و چهار:

باقی مانده تقسیم 333333 بر 33 را پیدا کنید.

مساله بیست و پنج:

می خواهیم عدد ۱۲ را به صورت حاصل جمع اعداد صحیح که کوچکترین آنها ۲ است را بنویسیم. مثلاً $2 + 10$ ، $2 + 2 + 5$ ، $3 + 2 + 2 + 5$ سه حالت از این گونه نوشتن هستند. به چند طریق می توان این کار را کرد؟

مساله بیست و شش:

تصویر ۶ (رجوع شود به شکل ۶ در انتهای سوالات) سه شکل اول یک سری (دنباله) شکلی را نشان می دهد. (دنباله از چپ به راست)
اولین شکل یک مثلث متساوی الاضلاع ABC است که هر ضلع آن برابر با یک است. ضلع اولیه شکل یک در جهت حرکت عقربه های ساعت از A ، AB نامگذاری شده است و در شکل

تیره است. شکل دوم همان مثلث متساوی الاضلاع را نشان می دهد که به یک مربع به ضلع یک به ضلع AB وصل شده است (در جهت عقربه های ساعت از ضلع مثلث) شکل سوم همان مثلث و مربع را نشان می دهد که به یک پنج ضلعی با ضلعی به اندازه یک در جهت عقربه های ساعت وصل شده است. شکل چهارم با وصل کردن یک شش ضلعی به یک ضلع پنج ضلعی در جهت عقربه های ساعت از ضلع پنج ضلعی درست می شود. شش ضلعی بر روی مثلث می افتد. این کار را ادامه دهید تا شکل هشتم بعد از وصل کردن آخرین شکل (یک ده ضلعی) به دست می آید به طوری که ضلع اولیه اش (در جهت عقربه های ساعت) به ضلع AC زاویه ی کمتر از 180° درست می کند. اندازه ی این زاویه به درجه را می توان به صورت $\frac{m}{n}$ در حالی که m, n نسبت به هم اول هستند نوشت. $m + n$ را پیدا کنید.

مساله بیست و هفتم:

فرض کنید a, b, c اعداد حقیقی هستند که $a + b + c = 5$ و $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$ بزرگترین مقدار $a^3 + b^3 + c^3$ را پیدا کنید.

مساله بیست هشتم:

فرض کنید A, B, C, D, E, F, G, H هشت راس یک مکعب $30 \times 30 \times 30$ هستند. شکل مکعب در شکل ۷ در انتهای سوالات داده شده است. ۲ شکل $ACFH$ و $BDEG$ جسم چهار وجهی متجانس هستند. حجم جسم مشترک این چهار وجهی را پیدا کنید.

مساله بیست و نه:

یک شبکه 5×2 از مربع ها را می توان با سه نوع کاشی به هر ترکیبی پوشاند (مراجعه شود به شکل ۸ در انتهای سوالات). سه نوع کاشی از انواع کاشی های مربع واحد ، کاشی دو واحدی و کاشی سه واحدی (به شکل L) هستند. شکل ۸ شبکه کاشی ها، انواع کاشی ها و یک نمونه از چیدمان کاشی ها را نشان می دهد. به چند صورت متفاوت می توان این شبکه را پوشاند؟

مساله سی:

فرض کنید x, y, z سه عدد صحیح هستند که در دو معادله ی زیر صدق می کنند.

$$x^2y + y^2z + z^2x = 2186$$

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 = 2188$$

$x^2 + y^2 + z^2$ را پیدا کنید.

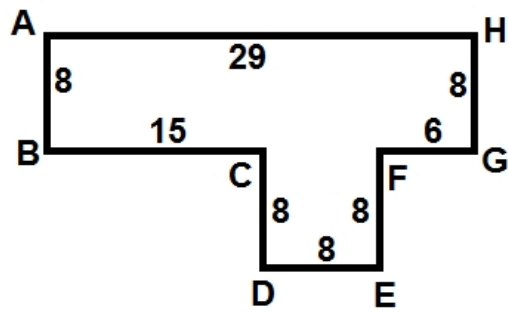


Figure 1:

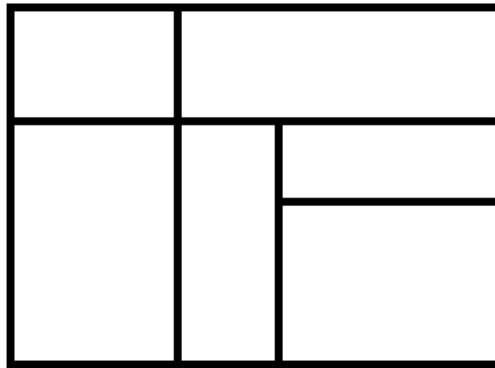


Figure 2:

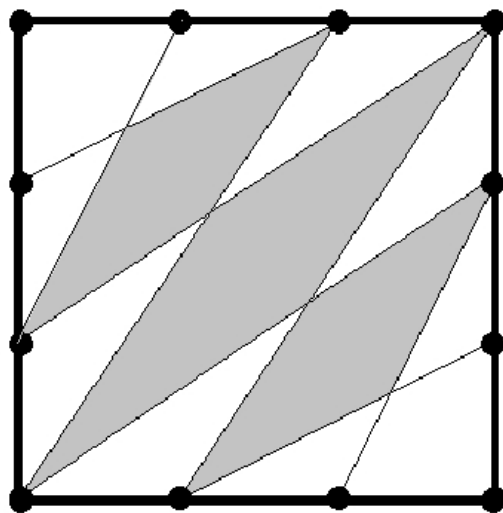


Figure 3:

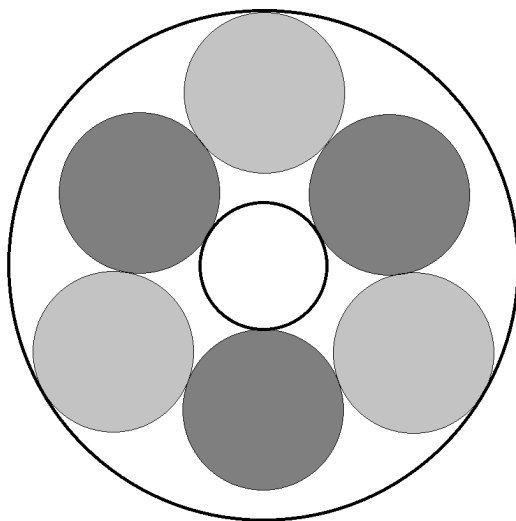


Figure 4:

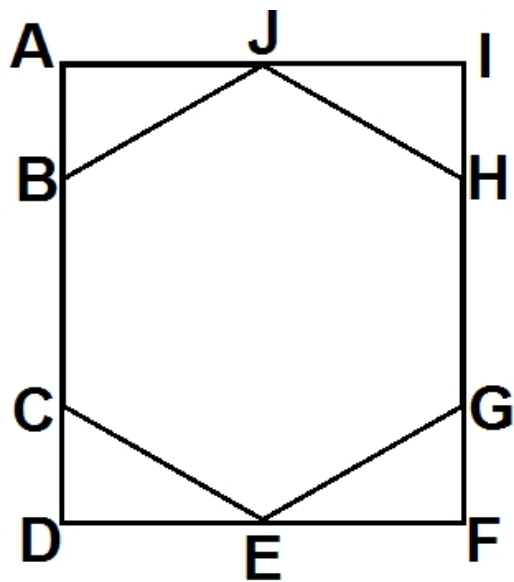


Figure 5:

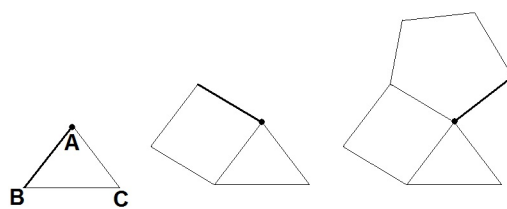


Figure 6:

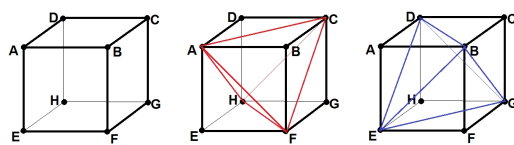


Figure 7:



Figure 8: