

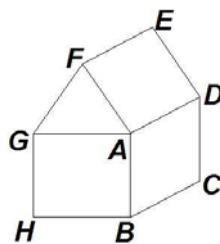
**PURPLE COMET! MATH MEET April ۲۰۱۵**

**MIDDLE SCHOOL - PROBLEMS**

Copyright© Titu Andreescu and Jonathan Kane

۱. آروین ۱۱ نصفه تارت، برنیس ۱۲ چهارم تارت، کریسیندا ۱۳ هشتم تارت و دریک ۱۴ شانزدهم تارت خوردند. آن‌ها روی هم چند تارت خورده‌اند؟

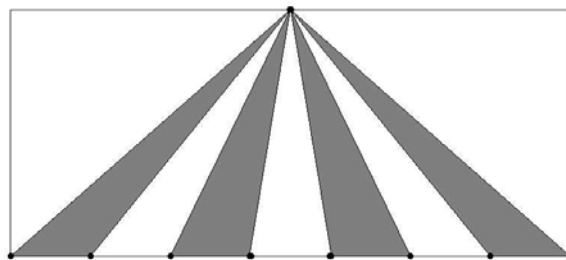
۲. شکل زیر از کنار هم قرار گرفتن یک مستطیل AGHB، یک مثلث متساوی‌الاضلاع AFG، یک مستطیل ADEF و متوازی‌الاضلاع ABCD ساخته شده است. زاویه  $\angle ABC$  چند درجه است؟



۳. عدد اعشاری متناوب  $۰.۲۱۵۱۵۱۵۱۵۱۵۱۵...$  را می‌توان به صورت کسر  $\frac{m}{n}$  نشان داد که m و n دو عدد صحیح و مثبت نسبت به هم اول هستند.  $m + n$  چیست؟

۴. ژانت آهنگی را در مدت ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه به وسیله کلارینت خود نواخت. هدف ژانت این است که آهنگ را ۲۵ درصد سریعتر بنوازد. ژانت وقتی به هدف خود برسد آهنگ را در چند ثانیه خواهد نواخت؟

۵. شکل زیر مستطیلی را نشان می‌دهد که یک ضلع آن به ۷ قسمت مساوی تقسیم شده و ضلع روبه‌روی آن نصف شده است. مساحت مستطیل برابر ۳۵۰ است. مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟

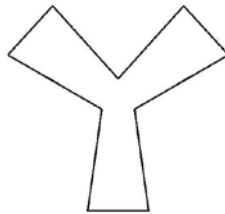


۶. کوچکترین عدد صحیح و مثبتی را بیابید که مجموع ارقام آن مضرب عدد ۲۷ باشد اما خود عدد بر ۲۷ بخشپذیر نباشد. (عدد ۸۷۹۹۹۹۲۱ چنین خاصیتی دارد.)

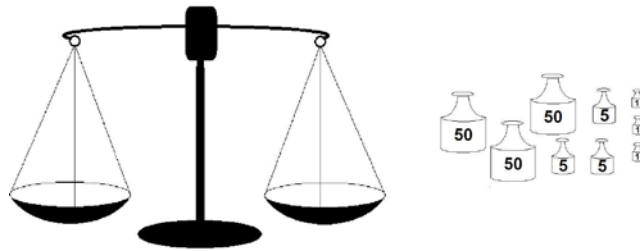
۷. چند مثلث متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع متفاوت می‌توان یافت که طول اضلاع آن‌ها اعداد صحیح و مثبت بوده و محیط آن‌ها کمتر از ۲۰ باشد؟

۸. وندولین یک جفت تاس ۶ وجهی را می‌ریزد و حاصلضرب عددهای روشده یادداشت می‌کند. او پیوسته ریختن تاس - ها و نوشتن حاصلضرب اعداد روشده را تا زمانی ادامه می‌دهد که یک عدد را سه بار یادداشت کند. بیشترین تعداد دفعاتی که دو تاس باید ریخته شوند، چقدر است؟

۹. زاویه‌های داخلی شکل زیر فقط دو اندازه مختلف دارند. اگر اندازه زاویه‌های بزرگتر سه برابر زاویه‌های کوچکتر باشند، اندازه هر یک از زاویه‌های بزرگتر چیست؟

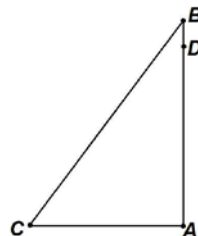


۱۰. ژروم در یک آزمایشگاه شیمیایی متروکه یک ترازوی دوکفه‌ای را به همراه سه وزنه ۱ گرمی، سه وزنه ۵ گرمی و سه وزنه ۵۰ گرمی پیدا می‌کند. ژروم با قرار دادن یک کیسه مواد شیمیایی روی یک کفه و تعداد موردنیاز وزنه روی کفه دیگر می‌تواند وزن کیسه را بدست آورد. بیشترین تعداد کیسه‌های با وزن‌های مختلفی که او می‌تواند وزن کند چقدر است؟



۱۱. فروشگاه «باغچه بنفش» تخم چمن را در بسته‌های ۱۰ پوندی و ۱۵ پوندی عرضه می‌کند. دیروز نصف تخم چمن موجود در مغازه در بسته‌های ۱۰ پوندی بود. امروز صبح برای فروشگاه یک بار حاوی ۲۷ بسته تخم چمن دیگر رسید و حالا آن‌ها دوبار برابر بسته‌های ۱۵ پوندی، بسته‌های ۱۰ پوندی دارند. الان مجموع وزن کل تخم چمن موجود در فروشگاه چقدر است؟

۱۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC در زاویه A قائمه است. همچنین  $AB = ۲۰$  و  $AC = ۱۵$  می‌باشد. نقطه D روی پاره‌خط AB قرار داشته و  $BD = ۲$  است. نقطه‌های E و F به ترتیب روی اضلاع CA و CB طوری قرار دارند که CD یک میانه مثلث  $\triangle CEF$  است. مساحت مثلث  $\triangle CEF$  چقدر است؟



۱۳. اعداد حقیقی  $x, y, z$  طوری هستند که در دو معادله  $x + y + z = ۱۰$ ،  $x^2 + y^2 + z^2 = ۵۰$  صدق می‌کنند. بیشترین مقدار ممکن برای عبارت  $(x + ۲y + ۳z)^2 + (y + ۲z + ۳x)^2 + (z + ۲x + ۳y)^2$  چیست؟

۱۴. بیشترین مقدار صحیح و مثبت برای عدد  $n$  را بیابید به شرطی که  $۷۲! + ۷۱! + ۷۰!$  بر  $۳^n$  بخش پذیر باشد.

۱۵. چند عدد صحیح مثبت و کوچکتر از ۲۰۱۵ وجود دارد که دقیقا ۹ شمارنده (مقسوم علیه) صحیح و مثبت دارد؟

۱۶. جیمی، لیندا و دان هریک چند دسته گل از یک گل فروشی خریدند (قیمت هر دسته گل با دسته گل دیگر برابر بود). سپس آن‌ها را به «بازار روز» بردند تا با قیمت ثابت و بالاتر از قیمت خرید خود در بازار بفروشند. در پایان بازار روز نیز دسته گل‌های باقی مانده را به برگزارکنندگان بازار روز هدیه دادند. در آن روز جیمی ۲۰ دسته گل خرید و ۱۵ تا را فروخت و ۶۰ دلار سود برد. لیندا ۳۴ دسته گل خرید و ۲۴ تا را فروخت و ۶۹ دلار سود برد. دان ۴۰ دسته گل خرید و ۳۶ تا را فروخت. دان چقدر سود برده است؟

۱۷. باغچه‌ای به شکل متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  می‌باشد. در گوشه‌های باغچه چهار میله عمودی  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  و  $DD'$  کار گذاشته شده‌اند. ارتفاع میله‌ها به ترتیب و برحسب سانتی متر برابر  $AA' = ۶۸$  و  $BB' = ۷۵$  و  $CC' = ۱۱۲$  و  $DD' = ۱۳۳$  می‌باشد. فاصله بین نقطه‌های وسط دو پاره خط  $A'C'$  و  $B'D'$  را بدست آورید.

۱۸. تعداد زیادی مکعب چوبی یکسان در اختیار دارید و ۴ رنگ مختلف هم موجود است. شما هر وجه هر مکعب را فقط با یک رنگ طوری رنگ می‌زنید که در هر مکعب حداقل یک وجه با هر ۴ رنگ وجود داشته باشد. تعداد راه‌های متفاوتی را که می‌توان مکعب‌ها را رنگ کرد بدست آورید. (دو مکعب متفاوت هستند اگر با چرخاندن و دوران آن به مکعب دیگر تبدیل نشود).

۱۹. اعداد حقیقی  $a, b, c, d$  را طوری در نظر بگیرید که در معادله زیر صدق کنند.

$$a^2 + 3b^2 + \frac{c^2 + 3d^2}{2} = a + b + c + d - 1$$

مقدار  $۱۰۰۰a + ۱۰۰b + ۱۰c + d$  را پیدا کنید.

۲۰. شکل زیر یک مستطیل  $۸ \times ۷$  را نشان می‌دهد که در هر گوشه آن یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع  $۳ - ۴ - ۵$  رسم شده است. دو مثلث پایینی دو ضلع به طول ۴ خود را روی ضلع پایینی مستطیل قرار داده‌اند، در حالی که دو مثلث بالایی دو ضلع به طول ۳ خود را روی ضلع بالایی مستطیل قرار داده‌اند. یک دایره بر چهار وتر مثلث‌های قائم‌الزاویه مماس است. قطر این دایره برابر  $\frac{m}{n}$  است که در آن  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح و مثبت نسبت به هم اول هستند.  $m + n$  چیست؟

