

PURPLE COMET! MATH MEET April 2017  
HIGH SCHOOL - PROBLEMS

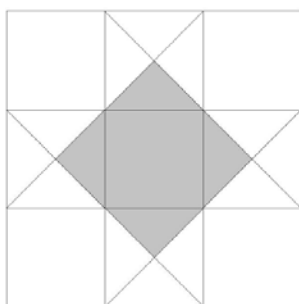
Copyright © Titu Andreescu and Jonathan Kane

آماده‌سازی و ترجمه به فارسی : سهیل فرش‌باف

[azmoonvoroodi@gmail.com](mailto:azmoonvoroodi@gmail.com)

۱. پاول (Paul) از عدد ۱ شروع کرده و سه تا سه تا می‌شمرد:  $۱, ۴, ۷, ۱۰, \dots$ . پنی (Penny) در همین زمان و با همین سرعت از عدد ۲۰۱۷ شروع کرده و پنج تا پنج تا می‌شمرد:  $۲۰۱۷, ۲۰۱۲, ۲۰۰۷, ۲۰۰۲, \dots$ . عددی را بیابید که هم پاول و هم پنی هم زمان آن را می‌شمرند.

۲. شکل زیر مربع بزرگی را نشان می‌دهد که به ۹ مربع کوچک‌تر و مساوی تقسیم شده است. مساحت مربع رنگی که از کنار هم قرار گرفتن بعضی قطره‌های مربع‌های کوچک به وجود آمده، برابر ۱۴ دارد. مساحت مربع بزرگ را بیابید.



۳. وقتی فیل (Phil) و شیلی (Shelley) با هم روی ترازو می‌ایستند، ترازو عدد ۱۵۱ کیلوگرم را نشان می‌دهد. وقتی رایان (Ryan) و شیلی با هم روی ترازو می‌ایستند، ترازو عدد ۱۳۲ کیلوگرم را نشان می‌دهد. وقتی فیل و رایان با هم روی ترازو می‌ایستند، ترازو عدد ۱۱۵ کیلوگرم را نشان می‌دهد. وزن شیلی چند کیلوگرم است؟

۴. کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت مانند  $m$  را بیابید به طوری که:  $[۴۲, m] = [۱۵, m]$ . (در اینجا  $[a, b] =$  کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد  $b, a$ )

۵. در یک فروشگاه ۳۷۶ بسته شکلات وجود دارد. ماین (Min) برخی از بسته‌های شکلات را خرید. بسته‌های شکلات خریداری شده توسط ماکس (Max)، ۴۱ تا بیشتر از بسته‌های خریداری شده توسط ماین بوده است. اکنون در فروشگاه سه برابر تعداد شکلات‌هایی که ماین خریده است، بسته شکلات وجود دارد. ماین چند بسته شکلات خریده است؟

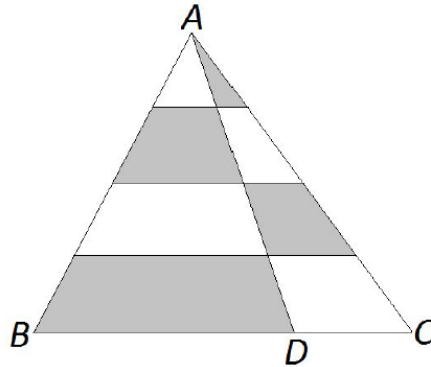
۶. برای بعضی مقدارهای ثابت  $k$  در چند جمله‌ای  $p(x) = ۳x^۲ + kx + ۱۱۷$ ،  $p(۱) = p(۱۰)$  می‌شود. مقدار  $p(۲۰)$  چقدر است؟

۷. یک لیست با ترتیب الفبایی از همه کلمه‌هایی که با حروف کلمه BETWEEN ساخته می‌شود را در نظر بگیرید. کلمه BEEENTW در ابتدای لیست قرار می‌گیرد. کلمه BEEENWT در ردیف دوم این لیست قرار می‌گیرد و لیست به همین ترتیب ادامه دارد. کلمه BETWEEN در چه ردیفی قرار می‌گیرد؟

۸. حاصل عبارت زیر چند صفر در انتهای سمت راست خود دارد؟  $525^{25^2} \times 252^{52^3}$

۹. شکل زیر مثلث  $ABC$  را نشان می‌دهد که نقطه  $D$  روی ضلع  $BC$  قرار دارد. سه خط موازی با ضلع  $BC$  پاره خط  $AD$  را به چهار بخش مساوی تقسیم کرده‌اند. در مثلث  $ABC$ ، نسبت ناحیه‌های رنگی به ناحیه‌های سفید برابر  $\frac{49}{33}$  است

و  $\frac{BD}{CD} = \frac{m}{n}$  است.  $m, n$  دو عدد صحیح و مثبت و نسبت به هم اول هستند.  $m+n$  را بیابید.



۱۰. تعداد اعداد صحیح و مثبت و کوچک‌تر از ۲۰۱۷ را بیابید که در آن‌ها حداقل یک جفت رقم زوج کنار هم وجود دارد. (به‌طور مثال اعداد ۲۴، ۱۸۶۲، ۲۰۱۲ شمرده می‌شوند. اما اعداد ۴، ۵۸، ۱۲۷۶ شمرده نمی‌شوند).

۱۱. داود تعداد زیادی تاس سالم و استاندارد و شش وجهی (مکعبی) دارد. در بار اول، داود ۸ تاس انتخاب می‌کند و آن‌ها را می‌ریزد. حاصل جمع اعداد رو شده را به‌دست می‌آورد تا  $r_1$  به‌دست آید. در بار دوم، داود به تعداد  $r_1$  تاس انتخاب می‌کند و آن‌ها را می‌ریزد. حاصل جمع اعداد رو شده را به‌دست می‌آورد تا  $r_2$  به‌دست آید. در بار سوم، داود  $r_2$  تاس انتخاب می‌کند و آن‌ها را می‌ریزد و حاصل جمع اعداد رو شده را به‌دست می‌آورد تا  $r_3$  به‌دست آید. امید ریاضی (Expected value) عدد  $r_3$  چیست؟

۱۲.  $P(x)$  یک چند جمله‌ای است که در رابطه  $P(x+1) + P(x-1) = x^2$  به ازای همه اعداد حقیقی  $x$  صدق می‌کند. مقدار  $P(12)$  چیست؟

۱۳. پنج ضلعی  $ABCDE$  با مساحت ۲۰۱۷ را در نظر بگیرید که چهار ضلع  $AB, BC, CD, EA$  از آن، دارای اندازه طول صحیح هستند. همچنین فرض کنید:  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$ ,  $AB = BC$ ,  $CD = EA$ . حداکثر محیط ممکن برای این پنج ضلعی  $a+b\sqrt{c}$  است که  $a, b, c$  اعدادی صحیح هستند و عدد  $c$  بر مجذور هیچ عدد اولی بخش‌پذیر نیست. حاصل  $a+b+c$  را بیابید.

۱۴. مجموع همه اعداد صحیح مانند  $n$  را بیابید به‌طوری که هر دو مقدار  $(n-3)$  و  $(n^2+4)$  مکعب کامل باشند.

۱۵. اعداد حقیقی  $c, b, a$  طوری هستند که چند جمله‌ای  $p(x) = 3x^7 - 291x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + 134x^2 - 2$  دارای ۷ ریشه حقیقی و مجموع این ریشه‌ها ۹۷ است. حاصل جمع معکوس این ۷ ریشه چیست؟

۱۶. فرض کنید  $a_1 = 1 + \sqrt{2}$  و برای هر عدد  $n$  ( $n \geq 1$ ) داریم:  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ . بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی حاصلضرب  $a_1 a_2 a_3 \dots a_p$  را بیابید.

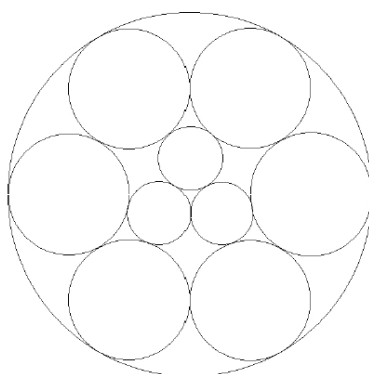
۱۷. عبارت  $\left(1 + \sqrt[6]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[6]{26 - 15\sqrt{3}}\right)^6 = m + n\sqrt{p}$  را در نظر بگیرید.  $p, n, m$  اعداد صحیح و مثبت هستند و  $p$  بر مجذور هیچ عدد اولی بخش پذیر نیست. حاصل  $m + n + p$  چقدر است؟

۱۸. در فضای مختصات سه بعدی فاصله نقطه  $(36, 36, 36)$  را از صفحه گذرنده از سه نقطه  $(36, 36, 36)$  و  $(36, 36, 36)$  پیدا کنید.

۱۹. بزرگترین مقدار صحیح  $n$  ( $n < 1000$ ) را پیدا کنید به طوری که  $(4n^2 - 3n)$  برابر حاصلضرب دو عدد متوالی فرد باشد.

۲۰. فرض کنید  $a$  یکی از جوابهای معادله  $\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt[3]{x^2 + 45}$  است. نسبت  $\frac{2017}{a^2}$  به  $(a^2 - 15a + 2)$  چقدر است؟

۲۱. شکل زیر دایره بزرگی را نشان می دهد. ۶ دایره متوسط و هم اندازه نیز دیده می شوند که با دایره بزرگ مماس داخل و با دو دایره متوسط کناری خود مماس خارج هستند. سه دایره کوچک و هم اندازه نیز وجود دارند که بر یکدیگر مماس هستند. هر کدام از دایره های کوچک بر ۲ دایره متوسط (مانند شکل) مماس می باشند. نسبت مساحت دایره بزرگ به مساحت یکی از دایره های کوچک را می توان به شکل  $m + \sqrt{n}$  نوشت، که  $m$  و  $n$  اعداد صحیح و مثبت می باشند. حاصل  $m + n$  را بیابید.



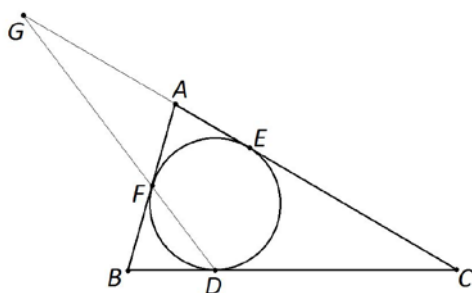
۲۲. تعداد تابع هایی مانند  $f$  را بیابید که از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  به خودش تعریف می شوند و برد تابع  $f(x)$  با برد تابع  $f(f(x))$  یکسان است.

۲۳. یک مکعب سه بعدی عادی، دارای ۶ وجه دو بعدی، ۱۲ یال یک بعدی و ۸ راس بی بُعد است. تعداد زیر صفحه‌های ۹ بعدی را در یک مکعب ۱۲ بُعدی بیابید.

۲۴. ۸ بسته قرمز و ۸ بسته آبی به‌طور تصادفی داخل ۴ جعبه که گنجایش هر کدام ۴ بسته است قرار گرفته‌اند. احتمال آن‌که دقیقاً یکی از جعبه‌ها شامل دو بسته قرمز و دو بسته آبی باشد،  $\frac{m}{n}$  است.  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی و نسبت به هم اول هستند. حاصل  $m+n$  چیست؟

۲۵. جیم (Jim) ظهر از خانه خارج شده و در طول یک مسیر مربعی به محیط ۴ مایل با سرعت ثابت ۴ مایل بر ساعت پیاده‌روی می‌کند و ساعت ۱ به خانه برمی‌گردد. در یک زمان تصادفی بین ظهر تا ساعت ۱، سالی (Sally) یک محل تصادفی را در طول مسیر جیم انتخاب کرده و با سرعت ثابت ۷ مایل بر ساعت شروع به دویدن در جهت پیاده‌روی جیم می‌کند. او دویدن را تا پایان اولین باری که مسیر مربعی را طی کند ادامه می‌دهد. احتمال آن‌که در حال پیاده‌روی جیم، سالی پشت او بدود،  $\frac{m}{n}$  است. که  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی نسبت به هم اول هستند.  $m+n$  چقدر است؟

۲۶. دایره محاطی مثلث  $ABC$  به‌ترتیب در نقاط  $F, E, D$  به اضلاع  $AB, AC, BC$  مماس است. نقطه  $G$  محل برخورد خط‌های  $AC$  و  $DF$  است (مانند شکل). طول اضلاع مثلث  $ABC$  به این ترتیب است:  $AB = ۷۳, BC = ۱۲۳, AC = ۱۲۰$  چقدر است  $EG$ ؟



۲۷. اگر  $w, z, y, x$  اعداد حقیقی باشند، حداقل مقدار عبارت زیر چقدر است؟  
 $۴(x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲) + (xy - ۷)^۲ + (yz - ۷)^۲ + (zw - ۷)^۲ + (wx - ۷)^۲$

۲۸. می‌دانیم  $T_k = \frac{k(k+1)}{۲}$   $k$ امین عدد مثلثی است. حاصل سری نامتناهی  $\sum_{k=۴}^{\infty} \frac{1}{(T_{k-1} - 1)(T_k - 1)(T_{k+1} - 1)}$

برابر  $\frac{m}{n}$  است که  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی نسبت به هم اول هستند.  $m+n$  چقدر است؟

۲۹. تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, \dots, ۱۳\}$  را به‌دست آورید، که شامل حداقل یک مضرب ۲، حداقل یک مضرب ۳ و حداقل یک مضرب ۵ باشند. مانند  $\{2, 3, 5\}, \{6, ۱۰, ۱۳\}$ .

۳۰. یک تانکر مخروطی شکل با قطر قاعده ۱۸ و ارتفاع ۱۲ وجود دارد. راس تانکر به سمت پایین قرار دارد و بالای آن باز است. ۴ کره با شعاع‌های مساوی ۳، مانند شکل درون تانکر قرار گرفته‌اند. کره اول پایین مخروط قرار دارد و با مخروط در طول یک دایره مماس است. کره‌های دوم، سوم و چهارم جایی قرار گرفته‌اند که هر کدام هم با مخروط و هم با کره اول مماس هستند. کره‌های دوم و چهارم نیز هر کدام با کره سوم مماس می‌باشند. حجم چهار وجهی که رئوس آن مرکزهای این ۴ کره است، برابر  $K$  است.  $K^2$  چقدر است؟

