

PURPLE COMET! MATH MEET April 2017
MIDDLE SCHOOL – PROBLEMS

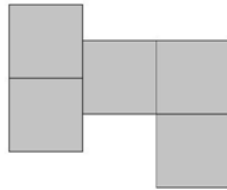
Copyright© Titu Andreescu and Jonathan Kane

آماده سازی و ترجمه به فارسی : سهیل فرشلاف

azmoonvoroodi@gmail.com

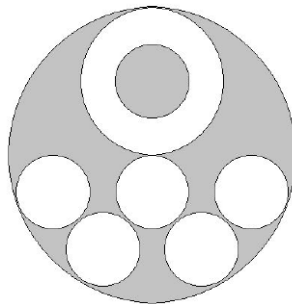
۱. کادن (Caden)، زویی (Zoe)، نوا (Noah) و سوفیا (Sophia) یک پیتزا را بین خود تقسیم کردند. کادن ۲۰ درصد پیتزا را خورد. زویی ۵۰ درصد بیشتر از کادن پیتزا خورد. نوا نیز ۵۰ درصد بیشتر از زویی پیتزا خورد و سوفیا باقی مانده پیتزا را میل کرد. سوفیا چند درصد از پیتزا را خورده است؟

۲. شکل زیر از چسباندن ۵ مربع یکسان ساخته شده است. (مربع ها روی هم نیفتاده اند). مساحت شکل به وجود آمده ۴۵ است. محیط شکل چقدر است؟



۳. ستاره دنباله دار استروم کویست (Stromquist) هر ۶۱ سال یکبار ظاهر می شود. اگر این ستاره دنباله دار در سال ۲۰۱۷ مشاهده شود، سال کبیسه بعدی که دوباره ظاهر می شود، چیست؟

۴. شکل زیر شامل شش دایره به شعاع ۴ و یک دایره به شعاع ۸ و یک دایره به شعاع ۱۶ است. مساحت ناحیه رنگی برابر $k\pi$ است. k را بیابید.



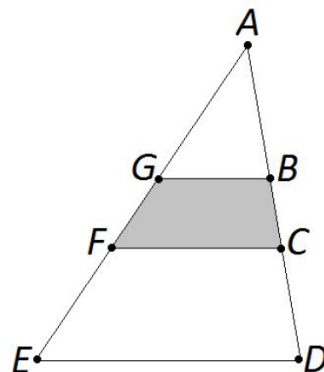
۵. بزرگترین شمارنده ی فرد عدد $۱۶۰^۲$ چیست؟

۶. آیدین صبح‌ها از تخت بیرون آمده و برای رفتن آماده می‌شود. او سوار اتوبوس می‌شود و از ایستگاه اتوبوس تا محل کارش را پیاده می‌رود و ۱۲۰ دقیقه پس از بیداری به محل کارش می‌رسد. یک روز صبح، آیدین دیر از خواب برخاست. در زمان نصف حالت عادی آماده رفتن شد. اما اتوبوس ۲۵ درصد دیرتر از معمول او را به ایستگاه رساند و او در نصف زمان معمول و با دویدن از ایستگاه به محل کارش رسید. او ۹۶ دقیقه پس از بیدار شدن به محل کارش رسیده بود. صبح روز بعد، آیدین زودتر از معمول بیدار شد و ۲۵ درصد بیشتر از همیشه برای آماده شدن زمان اختصاص داد. اما اتوبوس او را در زمانی ۲۵ درصد کمتر از همیشه به ایستگاه رساند و او با زمان ۲۵ درصد بیشتر از معمول از ایستگاه تا محل کار پیاده رفت. آیدین در این روز چند دقیقه پس از بیدار شدن به محل کارش رسیده است؟

۷. تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید که شمارنده عدد ۳۰۰ هستند.

۸. عدد مثبت و صحیح m مضرب ۱۱۱ است و عدد مثبت و صحیح n مضرب ۱۳۱ است. حاصل جمع آن‌ها ۲۰۱۷ است. $n - m$ را بیابید.

۹. در مثلث $\triangle ADE$ نقاط B و C روی ضلع AD و نقاط F و G روی ضلع AE طوری قرار گرفته‌اند که $DE \parallel CF \parallel BG$ (مانند شکل). مساحت $\triangle ABG$ برابر ۳۶ است و مساحت دوزنقه $CFED$ برابر ۱۴۴ است و $AB = CD$. مساحت دوزنقه $BGFC$ چقدر است؟



۱۰. تعداد چیدمان‌های مختلف حروف کلمه MATHMEET را بیابید که ابتدا و انتهای آن یک حرف یکسان قرار گرفته باشد. (مانند کلمه TAMEMHET)

۱۱. بزرگ‌ترین شمارنده اول عدد $۲۹! + ۳۳!$ چیست؟

۱۲. اعداد حقیقی x ، y و z طوری هستند که:

$$۱۲x - ۹y^2 = ۷$$

$$۶y - ۹z^2 = -۲$$

$$۱۲z - ۹x^2 = ۴$$

حاصل $۶x^2 + ۹y^2 + ۱۲z^2$ چیست؟

۱۳. شمارنده‌های صحیح و مثبت عدد 20^{17} را بیابید، به‌طوری که مربع کامل یا مکعب کامل باشند.

۱۴. فرض کنید a و b اعداد صحیح و مثبت هستند که $a + ab = 1443$ و $ab + b = 1444$. $10a + b$ چقدر است؟

۱۵. باقی‌مانده تقسیم 7^{7^7} بر عدد 1000 چیست؟

۱۶. مجموعه اعداد مثبت و حقیقی x که در نامساوی $|x| \leq 9|x^2 - 9|$ صدق می‌کنند، بازه $[m, M]$ است. $10m + M$ چقدر است؟

۱۷. فرض کنید $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6$ اعداد حقیقی هستند که $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$ و همچنین:

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = \frac{1}{2}$$
$$a_0 + a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = \frac{2}{3}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_4 + a_6 = \frac{7}{8}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 = \frac{29}{30}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 = \frac{143}{144}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{839}{840}$$

a_0 برابر $\frac{m}{n}$ است که m و n اعداد صحیح و مثبت نسبت به هم اول هستند. $m + n$ چیست؟

۱۸. اشکان ۴ تاس مکعبی سالم و استاندارد دارد. اشکان بازی جدیدی اختراع کرده است. در این بازی چهار تاس با هم ریخته می‌شود و ریختن تاس‌ها تا زمانی ادامه می‌یابد که عدد ۱ رو نشود. حالا اشکان وقتی برنده است که در بین اعداد رو شده حداقل یک عدد ۲ و حداقل یک عدد ۵ رو شود. احتمال آن که اشکان برنده شود برابر $\frac{m}{n}$ است و m و n اعداد صحیح و مثبت و نسبت به هم اول هستند. $m + n$ را بیابید.

۱۹. همه مقدارهای مختلف حاصل‌جمع $a + b$ را بیابید به طوری که a و b اعداد صحیح و مثبت بوده و $a^2 + \sqrt{2017 - b^2}$ مربع کامل باشد.

۲۰. در یک مخروط قائم، ارتفاع سه برابر شعاع قاعده بوده و حجم مخروط ۱ است. مخروط درون یک کره مانند شکل زیر محاط شده است. حجم کره برابر $\frac{m}{n}$ است. m و n اعداد صحیح و مثبت و نسبت به هم اول هستند. $m+n$ را بیابید.

